高三数学考试参考答案

1. A 【解析】本题考查集合的运算，考查数学运算的核心素养.

因为$\complement_R B=\{x|x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 3\}$，$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，所以 $A\cup(\complement_R B)=\{x|x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant 3\}$.

2. B 【解析】本题考查复数的四则运算，考查数学运算的核心素养.

因为 $z^2=3-4i$，所以 $|z^2|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

3. C 【解析】本题考查百分位数，考查数据分析的核心素养.

因为 $60\%\times 10=6$，所以$\frac{169+x}{2}=170$，解得 $x=171$.

4. C 【解析】本题考查函数的图象与性质，考查逻辑推理的核心素养.

易知 $f(x)$的定义域为$\{x|x\neq 0\}$，由 $f(x)=\frac{3^x\cos 6x}{3^{2x}-1}=\frac{\cos 6x}{3^x-3^{-x}}$，得 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$是奇函数，其图象关于原点对称，排除 A，B. 在$(0,\frac{\pi}{12})$内，$\cos 6x>0$，$3^x-3^{-x}>0$，所以 $f(x)=\frac{\cos 6x}{3^x-3^{-x}}>0$，排除 D. 故选 C.

5. D 【解析】本题考查椭圆的性质，考查数学运算的核心素养.

作 $GH\perp MN$，垂足为 H(图略)，因为$|GN|=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$\angle GNM=30^\circ$，所以$|GH|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$|HN|=2$，$|OH|=2$(O为坐标原点). 不妨设点 G 的坐标为$(2,\frac{2\sqrt{3}}{3})$，把点 G 的坐标代入$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1$，得 $b^2=\frac{16}{9}$，所以 $c=\sqrt{4^2-\frac{16}{9}}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$，从而$\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

6. B 【解析】本题考查三角恒等变换，考查数学运算的核心素养.

因为 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2}$，$0<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，所以 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$，$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

又因为 $0<\beta<\frac{3\pi}{4}$，所以$-\frac{3\pi}{4}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{4}$，所以 $\sin(\alpha-\beta)=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

当 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$时，

$\sin\beta=\sin[\alpha-(\alpha-\beta)]=\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

因为 $0<\beta<\frac{3\pi}{4}$，所以 $\sin\beta>0$，故 $\sin\beta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$不符合题意，舍去；

当 $\sin(\alpha-\beta)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，同理可求得 $\sin\beta=\sin[\alpha-(\alpha-\beta)]=\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$，符合题意.

综上，$\sin\beta=\frac{5\sqrt{3}}{9}$.

7. A 【解析】本题考查几何体的体积，考查直观想象与数学运算的核心素养.

因为 $V_{圆柱}=\pi\times(\frac{3}{2})^2\times 2\sqrt{3}=\frac{9\sqrt{3}\pi}{2}$ cm^3，$V_{圆台}=\frac{\pi}{3}\times[(\frac{3}{2})^2+(\frac{9}{2})^2+\frac{3}{2}\times\frac{9}{2}]\times(3\sqrt{3}+\sqrt{3})=39\sqrt{3}\pi$ cm^3，所以该青铜器的体积 $V=\frac{9\sqrt{3}\pi}{2}+\frac{78\sqrt{3}\pi}{2}=\frac{87\sqrt{3}\pi}{2}$ cm^3.

8. B 【解析】本题考查函数的新定义，考查推理论证能力与直观想象的核心素养.

令 $f(x)=|x|-1$，$g(x)=x^2-2ax+a+2$.

依题意 $x^2-2ax+a+2=0$ 有解，则 $\Delta=4a^2-4(a+2)\geq 0$，得 $a\leq -1$ 或 $a\geq 2$.

当 $a\geq 0$ 时，必须满足 $\begin{cases}a>1,\\ g(1)=3-a\geq 0,\end{cases}$ 解得 $1<a\leq 3$；

当 $a<0$ 时，必须满足 $\begin{cases}a<-1,\\ g(-1)=3a+3\geq 0,\end{cases}$ 无解.

综上，$2\leq a\leq 3$，即实数 a 的取值范围是 $[2,3]$.

9. AC 【解析】本题考查直线与圆、圆与圆的位置关系，考查直观想象的核心素养.

因为 $O_1(1,0)$，$O_2(5,0)$，$r_1=2$，$r_2=4$，所以 $r_2-r_1<|O_1O_2|=4<r_2+r_1$，则圆 O_1 与圆 O_2 相交，A 正确，B 错误；

设圆心 O_2 到直线 $x-y=0$ 的距离为 d_2，则 $d_2=\frac{5-0}{\sqrt{2}}<2\sqrt{m}$，解得 $m>\frac{25}{8}$，C 正确；

设圆心 O_1 到直线 $x-y=0$ 的距离为 d_1，则 $d_1=\frac{1-0}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $|MN|=2\sqrt{4-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=\sqrt{14}$，D错误.

10. AD 【解析】本题考查三角函数的性质，考查数学运算的核心素养.

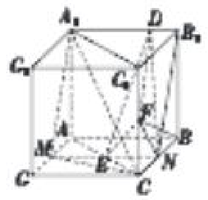
对于 A，当 $\theta=\frac{5\pi}{6}$ 时，$g(x)=2\sin(2x+\frac{3\pi}{2})=-2\cos 2x$，是偶函数，A 正确；

对于 B，当 $\theta=\frac{5\pi}{6}$ 时，$g(x)=-2\cos 2x$，因为 $x\in[0,\frac{\pi}{3}]$，$2x\in[0,\frac{2\pi}{3}]$，所以 $g(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{3}]$ 上单调递增，B 错误；

对于 C，当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$g(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，因为 $x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$，$2x+\frac{\pi}{3}\in[0,\frac{2\pi}{3}]$，$g(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})\in[0,2]$，C 错误；

对于 D，当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$g(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，因为 $\sin(-2\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3})=0$，所以点 $(-\frac{\pi}{6},0)$ 是 $g(x)$ 图象的一个对称中心，D 正确.

11. ABD 【解析】本题考查立体几何初步的知识，考查直观想象的核心素养.



因为 $BF\perp A_1B_1$，$A_1B_1 // AB$，所以 $BF\perp AB$.

又因为 $AB\perp BB_1$，$BF\cap BB_1=B$，所以 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1.

又因为 $AB=BC=2$，所以构造正方体 $ABCG-A_1B_1C_1G_1$，如图所示.

设直线 EN 交 AG 于点 M，连接 A_1M，B_1N.

因为 E，F 分别为 AC 和 CC_1 的中点，且 N 是 BC 的中点，

易证 $Rt\triangle BCF\backsim Rt\triangle B_1BN$，则 $\angle CBF=\angle BB_1N$.

又因为 $\angle BB_1N+\angle B_1NB=90°$，所以 $\angle CBF+\angle B_1NB=90°$，从而 $BF\perp B_1N$.

又因为 $BF\perp A_1B_1$，$B_1N\cap A_1B_1=B_1$，所以 $BF\perp$ 平面 A_1MNB_1.

又因为 $ED\subset$ 平面 A_1MNB_1，所以 $BF\perp DE$，故 A 正确.

因为 E，N 分别为 AC 和 BC 的中点，所以 $EN // AB$.

又因为 $AB // A_1B_1$，所以 $EN // A_1B_1$，因为 $A_1B_1\not\subset$ 平面 EFN，$EN\subset$ 平面 EFN，所以 $A_1B_1 //$ 平面 EFN，所以点 D 到平面 EFN 的距离为定值，故三棱锥 $F-DEN$ 的体积为定值，故 B 正确.

由向量投影可得 $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}|CC_1|^2=2$，故 C 错误.

又因为 $MN // A_1B_1$，$MN=A_1B_1$，所以 A_1B_1NM 为平行四边形，$B_1N // A_1M$，所以 $\angle CA_1M$ 为异面直线 A_1C 与 B_1N 所成的角，易知 $A_1M=CM=\sqrt{5}$，$A_1C=2\sqrt{3}$，则 $\cos\angle CA_1M=\frac{\sqrt{15}}{5}$，故 D 正确.

12. BCD 【解析】本题考查导数在研究函数中的应用，考查逻辑推理的核心素养.

因为 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称，所以 $y=f(x+2)$ 为奇函数，故 A 错误；

因为 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称，所以 $f(x)=-f(4-x)$，对其两边取导数，

得 $f'(x)=f'(4-x)$，所以 $f'(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，故 B 正确；

因为 $g'(x)=\cos \pi x$，所以 $g(x)=\frac{1}{\pi}\sin \pi x+C$（$C$ 为常数），由 $g(1)=0$，得 $C=0$，即 $g(x)=\frac{1}{\pi}\sin \pi x$，令 $\pi x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=k+\frac{1}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{3}{2}$ 对称，故 C 正确；

因为 $f(x)$，$g(x)$ 的图象都关于点 $(2,0)$ 对称，所以 $\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=\sum\limits_{i=1}^{m}x_i+\sum\limits_{i=1}^{m}y_i=\frac{m}{2}\times4+\frac{m}{2}\times0=2m$，故 D 正确。

13. 2 【解析】本题考查平面向量的平行，考查数学运算的核心素养。

因为 $a/\!/b$，所以 $m+4=3m$，解得 $m=2$。

14. $\frac{10}{21}$ 【解析】本题考查排列组合的知识，考查数学抽象与数学建模的核心素养。

9 个车位要停放 4 辆车，基本事件的总数为 A_9^4，其中 4 辆车中恰有 2 辆车停放在相邻车位包含的基本事件的个数为 $A_4^2A_6^3$，所以所求概率 $P=\frac{A_4^2A_6^3}{A_9^4}=\frac{10}{21}$。

15. $-\frac{3}{8}$ 【解析】本题考查基本不等式，考查数学运算的核心素养。

由已知得 $z=x^2+4y^2-xy\geqslant3xy$，因为 $xy>0$，所以 $\frac{xy}{z}\leqslant\frac{1}{3}$，当且仅当 $x=2y$ 时，等号成立，此时 $z=6y^2$，所以 $z-x-y=6y^2-3y=6(y-\frac{1}{4})^2-\frac{3}{8}\geqslant-\frac{3}{8}$，当且仅当 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{4}$，$z=\frac{3}{8}$ 时，等号成立。

16. 1 【解析】本题考查抛物线的性质，考查直观想象与数学运算的核心素养。

抛物线 C 的方程可化为 $y=\frac{1}{2}x^2$，所以 $y'=x$。

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 l_1：$y-\frac{x_1^2}{2}=x_1(x-x_1)$，$l_2$：$y-\frac{x_2^2}{2}=x_2(x-x_2)$。

因为 $l_1\perp l_2$，所以 $x_1x_2=-1$。

设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，与抛物线 C 的方程联立得 $\begin{cases}y=kx+m,\\x^2=2y,\end{cases}$

消去 y 得 $x^2-2kx-2m=0$，$\Delta=4(k^2+2m)>0$，所以 $x_1+x_2=2k$，$x_1x_2=-2m=-1$，

解得 $m=\frac{1}{2}$，即 l：$y=kx+\frac{1}{2}$，联立方程 $\begin{cases}y=x_1x-\frac{x_1^2}{2},\\y=x_2x-\frac{x_2^2}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=k,\\y=-\frac{1}{2},\end{cases}$ 即 $M(k,-\frac{1}{2})$。

因为点 M 到直线 l 的距离 $d=\frac{|k^2+1|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{1+k^2}$，$|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=2(1+k^2)$，

所以 $S=\frac{1}{2}\times2(1+k^2)\times\sqrt{1+k^2}=(1+k^2)^{\frac{3}{2}}$，

显然当 $k=0$ 时，$\triangle MAB$ 的面积取得最小值 1。

17. 解：(1) 因为 $b\cos C+c\cos B=\frac{\sqrt{3}}{3}a\tan C$，

所以 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin A\tan C$。 ………………………… 2 分

整理得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin A\tan C$。 ………………………… 3 分

因为 $\sin A>0$，所以 $\tan C=\sqrt{3}$. …… 4分

又 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$. …… 5分

(2)因为△ABC的面积为 $2\sqrt{3}$，$b=2a$，所以 $\frac{1}{2}a\cdot 2a\cdot\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$. …… 7分

解得 $a=2,b=4$. …… 8分

所以 $c^2=2^2+4^2-2\times2\times4\times\frac{1}{2}=12$，则 $c=2\sqrt{3}$. …… 10分

评分细则：

解法二：

(1)因为 $b\cos C+c\cos B=\frac{\sqrt{3}}{3}a\tan C$.

所以 $b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{3}}{3}a\tan C$. …… 2分

整理得 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}a\tan C$. …… 3分

因为 $a>0$，所以 $\tan C=\sqrt{3}$. …… 4分

又 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$. …… 5分

(2)因为△ABC的面积为 $2\sqrt{3}$，$b=2a$，所以 $\frac{1}{2}a\cdot 2a\cdot\sin\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$. …… 7分

解得 $a=2,b=4$. …… 8分

所以 $c^2=2^2+4^2-2\times2\times4\times\frac{1}{2}=12$，则 $c=2\sqrt{3}$. …… 10分

18. 解：(1)因为 $S_n=2^n+\lambda$，所以 $a_1=S_1=2+\lambda$. …… 1分

当 $n\geq2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n+\lambda)-(2^{n-1}+\lambda)=2^{n-1}$. …… 3分

因为 $\{a_n\}$ 为等比数列，所以 $a_1=2+\lambda=1$，解得 $\lambda=-1$. …… 5分

所以 $a_n=2^{n-1}$. …… 6分

(2)因为 $b_n=a_n\log_2 a_{n+1}=2^{n-1}\log_2 2^n=n\times2^{n-1}$. …… 7分

所以 $T_n=1\times2^0+2\times2^1+3\times2^2+\cdots+n\times2^{n-1}$.

$2T_n=1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$. …… 9分

两式相减得 $-T_n=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}-n\times2^n$. …… 10分

即 $-T_n=\frac{1-2^n}{1-2}-n\times2^n=(1-n)\times2^n-1$. …… 11分

所以 $T_n=(n-1)\times2^n+1$. …… 12分

评分细则：

【1】第一问，写出 $a_1=S_1=2+\lambda$，得1分，写出 $a_n=2^{n-1}(n\geq2)$，累计得3分，证出 $\{a_n\}$ 是等比数列，且求出 $\lambda=-1$，累计得5分，写出 $\{a_n\}$ 的通项公式，累计得6分.

【2】第二问，求出 $b_n=n\times2^{n-1}$，累计得7分，求出 $-T_n=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}-n\times2^n$，累计得10分，直到给出正确结论得12分.

19. (1)证明：连接 BD.

因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AC\perp BD$. …… 2分

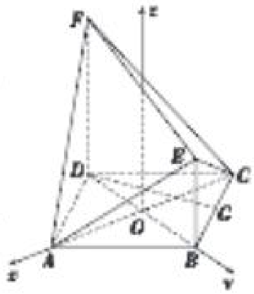
又 $EB\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $AC\perp EB$. …… 3分

因为 $BD\cap BE=B$，所以 $AC\perp$ 平面 BDE. …… 4分

又 $FD/\!/EB$，所以平面 BDE 就是平面 $BDFE$.

因为 $EF\subset$ 平面 $BDFE$，所以 $AC\perp EF$. ………………………………………………………… 5 分

(2)解：设 AC，BD 相交于点 O，以 O 为坐标原点，OA，OB 所在直线分别为 x，y 轴建立如图所示的空间直角坐标系. ………………………………………………………………………………………… 6 分



设 $AB=2$，则 $A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,1,0)$，$F(0,-1,2)$，$E(0,1,\frac{1}{2})$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$D(0,-1,0)$. ………………………………………………………………………… 8 分

设平面 AEF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{AE}=(-\sqrt{3},1,\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{AF}=(-\sqrt{3},-1,2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=-\sqrt{3}x+y+\frac{1}{2}z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AF}=-\sqrt{3}x-y+2z=0,\end{cases}$ 取 $z=4\sqrt{3}$，可得 $\boldsymbol{m}=(5,3\sqrt{3},4\sqrt{3})$. …… 10 分

取 BC 的中点 G，连接 DG，易证平面 $BCE\perp$ 平面 $ABCD$.

因为△BCD 是正三角形，所以 $DG\perp BC$，从而 $DG\perp$ 平面 BCE，即 $\overrightarrow{DG}$ 是平面 BCE 的一个法向量.

因为 $D(0,-1,0)$，$G(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$，所以 $\overrightarrow{DG}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0)$. ……………………………… 11 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{DG}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DG}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{DG}|}=\frac{2\sqrt{3}}{10\times\sqrt{3}}=\frac{1}{5}$，所以平面 AEF 与平面 BCE 夹角的余弦值为 $\frac{1}{5}$. …… 12 分

评分细则：

【1】第一问，证出 $AC\perp BD$，得 2 分，证出 $AC\perp EB$，累计得 3 分，第一问全部证完，累计得 5 分.

【2】第二问，建立空间直角坐标系，累计得 6 分，写出相关点和相关向量的坐标，累计得 8 分，计算出平面 AEF 的法向量，累计得 10 分，写出平面 BCE 的一个法向量，累计得 11 分，直至正确求出两个平面夹角的余弦值，累计得 12 分.

20. 解：(1)由题可知，可能的情况有①甲投中 1 次，乙投中 2 次；②甲投中 2 次，乙投中 1 次；③甲投中 2 次，乙投中 2 次. ……………………………………………………………………………………… 2 分

故所求概率为 $C_2^1\times(\frac{1}{2})^2\times(\frac{2}{3})^2+(\frac{1}{2})^2\times C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+(\frac{1}{2})^2\times(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$. ……………………… 4 分

(2)他们在一轮游戏中获得"神投小组"称号的概率 $p=C_2^1p_1(1-p_1)p_2^2+p_1^2\cdot C_2^1p_2(1-p_2)+p_1^2p_2^2$
$=2p_1p_2(p_1+p_2)-3p_1^2p_2^2$. …………………………………………………………………… 6 分

因为 $p_1+p_2=\frac{6}{5}$，所以 $p=\frac{12}{5}p_1p_2-3p_1^2p_2^2$.

因为 $0\leqslant p_1\leqslant1$，$0\leqslant p_2\leqslant1$，$p_1+p_2=\frac{6}{5}$，所以 $\frac{1}{5}\leqslant p_1\leqslant1$. ……………………………………… 7 分

又 $p_1p_2=-p_1^2+\frac{6}{5}p_1=-(p_1-\frac{3}{5})^2+\frac{9}{25}$，所以 $\frac{1}{5}\leqslant p_1p_2\leqslant\frac{9}{25}$. ……………………………… 9 分

令 $t=p_1p_2$，则 $\frac{1}{5}\leqslant t\leqslant\frac{9}{25}$，设 $p=h(t)=-3t^2+\frac{12}{5}t$.

当 $t=\frac{9}{25}$ 时，$p_{max}=\frac{297}{625}$. …………………………………………………………………… 10 分

他们小组在 n 轮游戏中获得"神投小组"称号的次数 ξ 满足 $\xi\sim B(n,p)$，由 $np=297$，则 $n=\frac{297}{p}\geqslant\frac{297}{\frac{297}{625}}=625$.

所以理论上至少要进行 625 轮游戏. ………………………………………………………… 11 分

此时 $p_1+p_2=\frac{6}{5}$，$p_1p_2=\frac{9}{25}$，$p_1=p_2=\frac{3}{5}$. ………………………………………………………… 12 分

评分细则：

【1】第一问，会进行分类，得 2 分，正确求出概率，累计得 4 分.

【2】第二问，求出他们在一轮游戏中获得"神投小组"称号的概率 $p=2p_1p_2(p_1+p_2)-3p_1^2p_2^2$，累计得 6 分.

求出$\frac{1}{5}\leqslant p_1p_2\leqslant\frac{9}{25}$，累计得9分，求出$p_{max}=\frac{297}{625}$，累计得10分，整个题完全正确得12分。

21.(1)解：因为$e=\sqrt{2}$，所以$(\sqrt{2})^2=1+\frac{b^2}{a^2}$，解得$a=b$. ………………………… 2分

所以双曲线C的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$.

把点$A(2,1)$的坐标代入$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$，得$\frac{4}{a^2}-\frac{1}{a^2}=1$，解得$a=\sqrt{3}$. ………………………… 3分

所以双曲线C的方程为$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$. ………………………… 4分

(2)证明：设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

设直线MN的方程为$y=kx+m$，代入$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$，

得$(1-k^2)x^2-2kmx-m^2-3=0$，于是$x_1+x_2=\frac{2km}{1-k^2}$，$x_1x_2=\frac{-m^2-3}{1-k^2}$①. ………………………… 6分

由$AM\perp AN$，得$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$，即$(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-1)(y_2-1)=0$，

整理得$(k^2+1)x_1x_2+(km-k-2)(x_1+x_2)+m^2-2m+5=0$. ………………………… 8分

将①代入上式，可得$\frac{(1-k^2)(-m^2-3)}{1-k^2}+\frac{2km(km-k-2)}{1-k^2}+(m-1)^2+4=0$，

整理得$-8k^2-4km-2m+2=2(2k+1)(1-2k-m)=0$. ………………………… 10分

因为$A(2,1)$不在直线MN上，所以$2k+m-1\neq0$，所以$2k+1=0$，解得$k=-\frac{1}{2}$，

即直线MN的斜率k为定值. ………………………… 12分

评分细则：

【1】第一问，正确写出$a=b$，得2分，写出$a=\sqrt{3}$，累计得3分，求出C的方程，累计得4分。

【2】第二问，根据韦达定理写出$x_1+x_2=\frac{2km}{1-k^2}$，$x_1x_2=\frac{-m^2-3}{1-k^2}$，累计得6分，写出$-8k^2-4km-2m+2=2(2k+1)(1-2k-m)=0$，累计得10分，算出$k=-\frac{1}{2}$，累计得12分。

22.解：(1)当$a=-2$时，$f(x)=xe^x-x^2$，则$f'(x)=(x+1)e^x-2x$. ………………………… 1分

令$g(x)=f'(x)=e^x(x+1)-2x$，得$g'(x)=(x+2)e^x-2$，再令$\varphi(x)=g'(x)=(x+2)e^x-2$，则$\varphi'(x)=(x+3)e^x$，易知$g'(x)$在$(-\infty,-3)$上单调递减，在$(-3,+\infty)$上单调递增. ………………………… 2分

又$g'(0)=0$，所以当$x\in(-\infty,0)$时，$g'(x)<0$，当$x\in(0,+\infty)$时，$g'(x)>0$. ………………………… 3分

故$f'(x)$的单调递减区间为$(-\infty,0)$，单调递增区间为$(0,+\infty)$. ………………………… 4分

(2)由$f(x)=e^x$，得$(x-1)e^x+\frac{1}{2}ax^2=0$，令$h(x)=(x-1)e^x+\frac{1}{2}ax^2$，得$h'(x)=x(e^x+a)$. ……… 5分

①当$a=0$时，$h(x)=(x-1)e^x$，$h(x)=0$只有一个根$x=1$，不符合题意. ………………………… 6分

②当$a>0$时，$e^x+a>0$，易知此时$h(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增，

所以$h(x)_{min}=h(0)=-1$.

又$h(1)=\frac{a}{2}>0$，所以当$x>0$时，存在$x_0\in(0,1)$，使得$h(x_0)=0$，即$h(x)=0$在$(0,+\infty)$上有一个根. ………………………… 7分

当$x<0$时，$e^x<1$，则$(x-1)e^x>x-1$，所以$h(x)=(x-1)e^x+\frac{1}{2}ax^2>\frac{1}{2}ax^2+x-1$.

取$x_1=\frac{-1-\sqrt{1+2a}}{a}<0$，则$h(x_1)>\frac{1}{2}ax_1^2+x_1-1=0$，所以$h(x_1)h(0)<0$，方程$h(x)=0$在$(x_1,0)$上有一个零点，所以$h(x)=0$有两个不同的根，符合题意. ………………………… 8分

③当 $a<0$ 时，由 $h'(x)=x(e^x+a)=0$，得 $x=0$ 或 $x=\ln(-a)$.

当 $\ln(-a)>0$，即 $a<-1$ 时，由 $h'(x)>0$，得 $x>\ln(-a)$或 $x<0$.

所以 $h(x)$在$(-\infty,0)$，$(\ln(-a),+\infty)$上单调递增，在$(0,\ln(-a))$上单调递减.

因为 $h(x)$的极大值 $h(0)=-1$，所以 $h(x)=0$ 至多有一个根，不符合题意. ……………………………… 9 分

当 $\ln(-a)=0$，即 $a=-1$ 时，$h(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $h(x)=0$ 至多有一个根，不符合题意. …… 10 分

当 $\ln(-a)<0$，即 $-1<a<0$ 时，由 $h'(x)>0$，得 $x<\ln(-a)$或 $x>0$.

所以 $h(x)$在$(-\infty,\ln(-a))$，$(0,+\infty)$上单调递增，在$(\ln(-a),0)$上单调递减.

因为当 $x<0$，$a<0$ 时，$h(x)=(x-1)e^x+\frac{1}{2}ax^2<0$，所以 $h(\ln(-a))<0$.

又 $h(0)=-1$，所以 $h(x)=0$ 至多有一个根，不符合题意. ………………………………………………… 11 分

综上，$a>0$，即实数 a 的取值范围为$(0,+\infty)$. ……………………………………………………… 12 分

评分细则：

【1】第一问，写出 $f'(x)=(x+1)e^x-2x$，得 1 分，正确判断出 $g'(x)$的单调区间，累计得 2 分，第一问都正确，累计得 4 分.

【2】第二问，写出 $h'(x)=x(e^x+a)$，累计得 5 分，每正确进行一次讨论，得 1 分，直至求出正确答案，累计得 12 分.

【3】采用其他方法，参照本评分标准依步骤给分.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。