天一大联考
2021—2022 学年高三年级上学期期末考试
文科数学·答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

1. 答案　D

命题意图　本题考查集合的表示、概念与运算.

解析　由 $A\cap B=B$，可知 a 的取值范围是 $[3,+\infty)$.

2. 答案　C

命题意图　本题考查复数的运算.

解析　$z=\dfrac{3+4\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=2+\mathrm{i}$.

3. 答案　A

命题意图　本题考查等差数列的前 n 项和 S_n 与 a_n 的关系、等差数列的定义.

解析　依题意，$S_8=\dfrac{8(a_1+a_8)}{2}=\dfrac{8(a_4+a_5)}{2}=\dfrac{8\times 7}{2}=28$.

4. 答案　B

命题意图　本题考查系统抽样.

解析　将 1 000 名老人分成 100 个组，每组 10 名老人，97 号老人被抽到，所以第 1 组抽到 7 号，且第 1 组至第 100 组抽到的老人编号构成等差数列 $\{a_n\}$，公差 $d=10$，所以 $a_n=10n-3$，令 $n=63$，得第 63 位的编号是 627.

5. 答案　B

命题意图　本题考查函数的图象与性质.

解析　因为 $f(-x)=(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x})\sin(-x)+1=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，排除 A，D，又 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}})+1>0$，排除 C.

6. 答案　D

命题意图　本题考查向量的模以及数量积的运算.

解析　由题可知 $(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$，即 $3\boldsymbol{a}^2-5\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2=0$，所以 $3|\boldsymbol{a}|^2-5|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\cos\alpha-2|\boldsymbol{b}|^2=0$. 因为 $|\boldsymbol{a}|=1$，$\cos\alpha=-\dfrac{1}{5}$，所以 $2|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{b}|-3=0$，解得 $|\boldsymbol{b}|=\dfrac{3}{2}$.

7. 答案　A

命题意图　本题考查三角函数的图象与性质的综合应用.

解析　因为 $f(x)$ 的最小正周期为 π，$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 为最小值，所以 $\omega=2$，由 $2\times\dfrac{2\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，可得 $\varphi=2k\pi-\dfrac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，又 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，故 $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$.

8. 答案　A

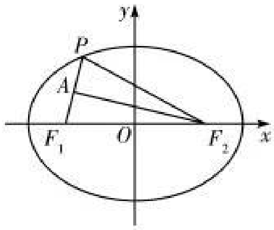
命题意图　本题主要考查函数模型的应用及指数、对数运算.

解析 由题可知 $2.85\times10^{40k-1}=2\ 850$，解得 $k=0.1$，所以 $y=2.85\times10^{0.1x-1}$. 设现在的销售成本为 y_1，对应的产品数量为 x_1，原来的销售成本为 y_2，对应的产品数量为 x_2，由题意知 $y_1=\frac{1}{4}y_2$，所以 $10^{0.1(x_2-x_1)}=4$，故 $x_2-x_1=10\lg 4\approx6$.

9. **答案** D

命题意图 本题考查椭圆的方程与性质.

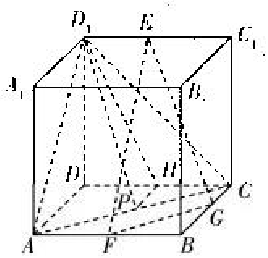
解析 如图所示，取 PF_1 的中点 A，设椭圆的焦距 $|F_1F_2|=2c(c>0)$，则 $|PF_2|=2c$，$|PF_1|=2a-2c$，故 $|PA|=a-c$. 因为 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{1}{4}$，所以 $\frac{|PA|}{|PF_2|}=\frac{1}{4}$，即 $4a-4c=2c$，解得 $c=2$，所以 $b^2=9-4=5$，$b=\sqrt{5}$.



10. **答案** C

命题意图 本题考查线面平行的性质.

解析 因为 P 是动点，PD_1∥平面 EFG，所以 P 在过 D_1 与平面 EFG 平行的平面 α 内，又 P 在底面 $ABCD$ 内，所以 P 在平面 α 与平面 $ABCD$ 的交线上，连接 AC，AD_1，D_1C，如图，易知 FG∥AC，EF∥AD_1，所以平面 EFG∥平面 D_1AC，P 在线段 AC 上，当 $D_1P\perp AC$ 时，D_1P 最短，易得此时 $D_1P=\sqrt{6}$.



11. **答案** C

命题意图 本题考查双曲线的方程与性质.

解析 由双曲线的离心率为 $\sqrt{2}$，可知双曲线为等轴双曲线，故双曲线的方程为 $x^2-y^2=a^2(a>0)$，则其渐近线的方程为 $y=\pm x$. 设 $A(m,m)$，$B(n,-n)(m>0,n>0)$，易知 $\triangle AOB$ 为直角三角形，则 $\triangle AOB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|OA||OB|=mn=12$，又可知 P 为线段 AB 中点，即 $P\left(\frac{m+n}{2},\frac{m-n}{2}\right)$ 在双曲线上，所以 $a^2=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2=mn=12$，$a=2\sqrt{3}$，故双曲线的实轴长为 $4\sqrt{3}$.

12. **答案** B

命题意图 本题考查利用导数研究函数的性质、函数的零点.

解析 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e},e^2\right]$ 上的零点即方程 $f(x)=0$ 在 $\left[\frac{1}{e},e^2\right]$ 上的实根，等价于 $\frac{1}{2a}=\frac{3\ln x}{x}$ 在 $\left[\frac{1}{e},e^2\right]$ 上的实根，设 $h(x)=\frac{3\ln x}{x}$，$x\in\left[\frac{1}{e},e^2\right]$，$f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e},e^2\right]$ 上的零点个数即直线 $y=\frac{1}{2a}$ 与函数 $h(x)$ 的图象的公共点

的个数. 因为 $h'(x)=\frac{3(1-\ln x)}{x^2}$,所以当 $x\in\left[\frac{1}{e},e\right)$时,$h'(x)>0$,$h(x)$单调递增,当 $x\in(e,e^2]$时,$h'(x)<0$,$h(x)$单调递减,所以 $h(x)_{\max}=h(e)=\frac{3}{e}$,又 $h\left(\frac{1}{e}\right)=-3e$,$h(e^2)=\frac{6}{e^2}$,画出 $h(x)$的简图,由图可知当$\frac{6}{e^2}\leqslant\frac{1}{2a}<\frac{3}{e}$,即$\frac{e}{6}<a\leqslant\frac{e^2}{12}$时 $f(x)$有两个零点.

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. **答案** 2

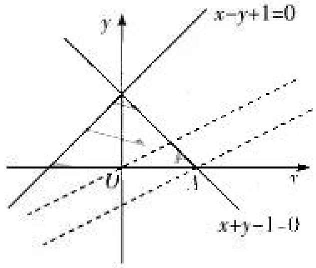
命题意图 本题考查等比数列的基本运算.

解析 因为 $S_4=S_2+18$,所以 $S_4-S_2=a_3+a_4=18$,即 $a_2q+a_2q^2=18$,所以 $q^2+q-6=0$,解得 $q=2$ 或 $q=-3$(舍去),故 $q=2$.

14. **答案** 1

命题意图 本题考查线性规划.

解析 $\begin{cases}y-1\leqslant x\leqslant 1-y,\\ y\geqslant 0\end{cases}$ 即$\begin{cases}x-y+1\geqslant 0,\\ x+y-1\leqslant 0,\\ 0\leqslant y,\end{cases}$作出可行域,如图中阴影区域所示,当直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{z}{2}$过点 $A(1,0)$时,z 取得最大值,且最大值为 1.



15. **答案** $-\frac{7}{10}$

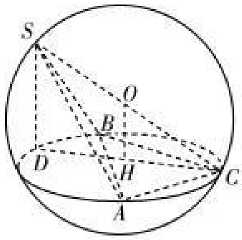
命题意图 本题考查三角函数的求值、三角恒等变形.

解析 由已知可得 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=2$,得$\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=2$,解得 $\tan\alpha=-3$,故 $\sin 2\alpha-\cos^2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha-1}{\tan^2\alpha+1}=-\frac{7}{10}$.

16. **答案** 20π

命题意图 本题考查球与多面体的综合应用,球的表面积的计算.

解析 如图,设$\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 H,外接圆半径为 r,球的半径为 R,延长 CH 交圆 H 于 D,连接 SD,由球的性质,知 $OH\perp$平面 $ADBC$,$OH\perp CD$,又 $OH \underline{\mathbin{/\!/}} \frac{1}{2}SD$,所以 $SD\perp CD$,$SD\perp$平面 $ADBC$,因为$\triangle ABC$ 的面积为$\frac{1}{2}AC\cdot BC\sin\angle ACB=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin 120^\circ=\sqrt{3}$,三棱锥 $S-ABC$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}SD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以 $SD=2$,$OH=1$,在$\triangle ABC$ 中,易知 $AB=2\sqrt{3}$,由正弦定理可得$\frac{AB}{\sin\angle ACB}=2r$,解得 $r=2$,则 $R^2=1^2+2^2=5$,所以球 O 的表面积为 $4\pi R^2=20\pi$.



三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查正余弦定理的综合应用.

解析 (Ⅰ)因为 $B+D=\pi$,所以 $\cos D=-\cos B=-\dfrac{1}{3}$. ………………………………………… (2 分)

在$\triangle ACD$中,由余弦定理可得 $AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos D=1^2+3^2-2\times1\times3\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=12$,

所以 $AC=2\sqrt{3}$. ………………………………………………………………………… (4 分)

(Ⅱ)设四边形 $ABCD$ 的面积为 S,则 $S=S_{\triangle BAC}+S_{\triangle DAC}$.

因为 $S_{\triangle DAC}=\dfrac{1}{2}DA\cdot DC\sin D=\dfrac{1}{2}DA\cdot DC\sqrt{1-\cos^2 D}=\sqrt{2}$. ………………………… (6 分)

在$\triangle ABC$中,由余弦定理可得 $AB^2+BC^2-AC^2=2AB\cdot BC\cdot\cos B$, ……………………………… (7 分)

即 $2AB^2-12=\dfrac{2}{3}AB^2$,得 $AB=BC=3$, ……………………………………………………… (9 分)

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\sin B=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\sqrt{1-\cos^2 B}=3\sqrt{2}$, ………………………… (11 分)

故四边形 $ABCD$ 的面积为$\sqrt{2}+3\sqrt{2}=4\sqrt{2}$. ………………………………………………… (12 分)

18. **命题意图** 本题考查新定义、平均数的计算及古典概型.

解析 (Ⅰ)由题可知 $\bar{x}_{甲}=\dfrac{1}{6}(142+140+139+138+141+140)=140$, ………………………… (1 分)

$\bar{y}_{乙}=\dfrac{1}{6}(138+142+137+139+143+141)=140$, …………………………………………… (2 分)

$m_{甲}=138$,$m_{乙}=137$, ……………………………………………………………………… (3 分)

$\xi_{甲}=\dfrac{1}{6}(4^2+2^2+1^2+0^2+3^2+2^2)=\dfrac{17}{3}$, ……………………………………………… (5 分)

$\xi_{乙}=\dfrac{1}{6}(1^2+5^2+0^2+2^2+6^2+4^2)=\dfrac{41}{3}$. ……………………………………………… (6 分)

(Ⅱ)六次训练中只有第 4,6 次甲、乙水平相当,

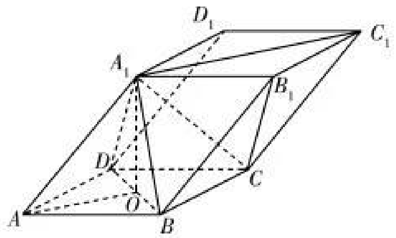
从六次中任选三次的结果有(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,2,6),(1,3,4),(1,3,5),(1,3,6),(1,4,5),(1,4,6),(1,5,6),(2,3,4),(2,3,5),(2,3,6),(2,4,5),(2,4,6),(2,5,6),(3,4,5),(3,4,6),(3,5,6),(4,5,6),共 20 种, ………………………………………………………………………………… (9 分)

其中有两次甲、乙水平相当的结果有 4 种, ……………………………………………………… (10 分)

故所求概率 $P=\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}$. ……………………………………………………………… (12 分)

19. **命题意图** 本题考查线线垂直的证明及棱锥体积的求解.

解析 (Ⅰ)如图,连接 A_1D,AO.



因为底面 $ABCD$ 为正方形，所以 $AB \underline{\parallel} CD$，

又 $AB \underline{\parallel} A_1B_1$，所以 $A_1B_1 \underline{\parallel} CD$，

所以四边形 A_1B_1CD 为平行四边形，所以 $A_1D \parallel B_1C$. ……………………………………………………（2 分）

因为 $A_1A = AB$，$\angle A_1AB = 60°$，所以 $\triangle A_1AB$ 为正三角形，$A_1B = AB$，

又 $A_1O \perp$ 平面 $ABCD$，$BD \subset$ 平面 $ABCD$，所以 $A_1O \perp BD$，……………………………………………（4 分）

又 O 为线段 BD 的中点，所以 $A_1D = A_1B = AD$.

设 $AB = a$，则 $BD = \sqrt{2}a$，因为 $A_1D = A_1B = a$，所以 $\triangle A_1BD$ 为等腰直角三角形，…………………（5 分）

所以 $A_1D \perp A_1B$，所以 $A_1B \perp B_1C$. ……………………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）由题可知 $V_{A_1-BB_1C_1C} = \frac{1}{3}V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} = V_{A_1-ABCD}$. ……………………………………………（8 分）

由（Ⅰ）可知 $AB = A_1B = A_1D = 2$，在等腰直角三角形 A_1BD 中，易知 $A_1O = \sqrt{2}$. ………………………（10 分）

又 $A_1O \perp$ 平面 $ABCD$，所以 $V_{A_1-ABCD} = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$，

所以 $V_{A_1-BB_1C_1C} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. ……………………………………………………………………………（12 分）

20. **命题意图** 本题考查抛物线的性质，直线与抛物线的综合应用.

解析 （Ⅰ）由题意得 $F(1,0)$，设直线 l 的方程为 $x = ty + 1$，$M(x_1,y_1)(y_1>0)$，$N(x_2,y_2)$，………（1 分）

联立方程得 $\begin{cases} x = ty + 1, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$ 消去 x 可得 $y^2 - 4ty - 4 = 0$，

由根与系数的关系得 $y_1 + y_2 = 4t$，$y_1y_2 = -4$. ………………………………………………………（3 分）

因为 $|MN| = 3|NF|$，所以 $|MF| = 2|NF|$，有 $y_1 = -2y_2$，

结合 $y_1y_2 = -4$，解得 $y_1 = 2\sqrt{2}$，$y_2 = -\sqrt{2}$，……………………………………………………（4 分）

所以 $t = \frac{\sqrt{2}}{4}$，

l 的方程为 $4x - \sqrt{2}y - 4 = 0$. ……………………………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）以 QF 为直径的圆的圆心为 $\left(\frac{n+1}{2},0\right)$，半径为 $\frac{n-1}{2}$，……………………………………………（7 分）

因为点 $M(x,y)$ 在该圆外，

所以 $\left(x - \frac{n+1}{2}\right)^2 + y^2 > \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$，即 $x^2 + (3-n)x + n > 0$ 对任意 $x > 0$ 恒成立. ………………（9 分）

令 $h(x) = x^2 + (3-n)x + n$. 则

①$\Delta = (3-n)^2 - 4n = n^2 - 10n + 9 < 0$，

解得 $1 < n < 9$；……………………………………………………………………………

② $\begin{cases}\Delta \geqslant 0,\\ \dfrac{n-3}{2} \leqslant 0,\\ h(0) \geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $0 \leqslant n \leqslant 1$，又 $n \neq 1$，故 $0 \leqslant n < 1$. ………………（11 分）

综上所述，n 的取值范围是 $[0,1)\cup(1,9)$. ………………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查导数的几何意义，利用导数研究函数的单调性及最值.

解析 （Ⅰ）由题可知 $f'(x) = -ax + a - e^x$，………………（1 分）

则 $f'(0) = a - 1 = 0$，………………（2 分）

解得 $a = 1$，所以 $f'(x) = -x + 1 - e^x$，$f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减. ………………（3 分）

又 $f'(0) = 0$，所以当 $x < 0$ 时，$f'(x) > 0$，当 $x > 0$ 时，$f'(x) < 0$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$，单调递减区间为 $(0, +\infty)$. ………………（5 分）

（Ⅱ）$f(x) \leqslant g(x)$ 等价于 $-\dfrac{1}{2}ax^2 + ax - xe^x \leqslant 0$（ * ）.

当 $x = 0$ 时，（ * ）式恒成立，………………（6 分）

当 $x > 0$ 时，（ * ）式即 $e^x + \dfrac{1}{2}a(x-2) \geqslant 0$. ………………（7 分）

设 $h(x) = e^x + \dfrac{1}{2}a(x-2)$，则 $h'(x) = e^x + \dfrac{1}{2}a$.

若 $a \geqslant 0$，因为 $e^x > 0$，所以 $h'(x) > 0$，$h(x)$ 单调递增，

所以 $h(x) > h(0) = 1 - a \geqslant 0$，所以 $0 \leqslant a \leqslant 1$. ………………（9 分）

若 $a < 0$，令 $h'(x) = 0$，得 $x = \ln\left(-\dfrac{1}{2}a\right)$.

若 $\ln\left(-\dfrac{1}{2}a\right) \leqslant 0$，即 $-2 \leqslant a < 0$，则 $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，

则 $h(x) > h(0) = 1 - a \geqslant 0$，解得 $-2 \leqslant a < 0$.

若 $\ln\left(-\dfrac{1}{2}a\right) > 0$，即 $a < -2$，则当 $0 < x < \ln\left(-\dfrac{1}{2}a\right)$ 时，$h'(x) < 0$，当 $x > \ln\left(-\dfrac{1}{2}a\right)$ 时，$h'(x) > 0$，

所以 $h(x)$ 在 $x = \ln\left(-\dfrac{1}{2}a\right)$ 处取得最小值，且 $h\left(\ln\left(-\dfrac{1}{2}a\right)\right) = -\dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{2}a\left[\ln\left(-\dfrac{1}{2}a\right) - 2\right] \geqslant 0$，

解得 $-2e^3 \leqslant a < -2$. ………………（11 分）

综上所述，所求的 a 的取值范围是 $[-2e^3, 1]$. ………………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查直角坐标方程与极坐标方程的互化，参数方程与普通方程的互化，极坐标方程的应用.

解析 （Ⅰ）l 的直角坐标方程为 $y = \sqrt{3}x$，化为极坐标方程为 $\theta = \dfrac{\pi}{3}(\rho \in \mathbf{R})$. ………………（2 分）

将圆 C 的参数方程变形为 $\begin{cases}x - a = \cos\alpha,\\ y = \sin\alpha,\end{cases}$ 平方相加得 $(x-a)^2 + y^2 = 1$，………………（3 分）

化为极坐标方程为 $\rho^2 - 2a\rho\cos\theta + a^2 - 1 = 0$. ………………（5 分）

（Ⅱ）将 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ 代入圆 C 的极坐标方程得 $\rho^2 - a\rho + a^2 - 1 = 0$.

设 $|\rho_1| = |OP|$，$|\rho_2| = |OQ|$，则 $\rho_1 + \rho_2 = a$，$\rho_1\rho_2 = a^2 - 1$，………………

$\Delta = a^2 - 4(a^2-1) > 0$，解得 $0 \leqslant a^2 < \frac{4}{3}$. …………（7 分）

所以 $|OP|^2 + |OQ|^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 = (\rho_1+\rho_2)^2 - 2\rho_1\rho_2 = a^2 - 2(a^2-1) = 2 - a^2$. …………（8 分）

所以 $|OP|^2 + |OQ|^2$ 的取值范围是 $\left(\frac{2}{3}, 2\right]$. …………（10 分）

23. **命题意图** 本题考查绝对值不等式的性质与解法.

解析 （Ⅰ）$f\left(\frac{1}{2}\right) + f(-1) \geqslant 8$，即 $|a+1| + |a-2| + 3 \geqslant 8$，亦即 $|a+1| + |a-2| \geqslant 5$，…………（1 分）

等价于不等式组 $\begin{cases} a \leqslant -1, \\ -a-1-a+2 \geqslant 5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -1 < a \leqslant 2, \\ a+1-a+2 \geqslant 5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a > 2, \\ a+1+a-2 \geqslant 5, \end{cases}$ …………（3 分）

解得 $a \leqslant -2$ 或 $a \geqslant 3$，故实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$. …………（5 分）

（Ⅱ）对任意的 $b \in (1, +\infty)$ 总存在 x_0，使 $f(x_0) < b + \frac{1}{b-1} + 1$ 成立，等价于 $f(x)_{\min} < \left(b + \frac{1}{b-1} + 1\right)_{\min}$.

…………（6 分）

因为 $f(x) = |2x+a| + |2x-1| \geqslant |a+1|$，所以 $f(x)_{\min} = |a+1|$. …………（7 分）

又 $b + \frac{1}{b-1} + 1 = b - 1 + \frac{1}{b-1} + 2 \geqslant 4$，$b \in (1, +\infty)$，当且仅当 $b = 2$ 时取等号，

所以 $\left(b + \frac{1}{b-1} + 1\right)_{\min} = 4$. …………（8 分）

由 $|a+1| < 4$，解得 $-5 < a < 3$，故所求实数 a 的取值范围是 $(-5, 3)$. …………（10 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。