2021—2022 学年高三年级上学期期中考试

文科数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. D	2. B	3. D	4. C	5. B	6. C
7. A	8. D	9. B	10. C	11. A	12. C

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 0　　14. 4

15. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$　　16. 22

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **解析** (Ⅰ) $f(x)=1+4\sqrt{3}\sin x\cos x\cos 2x-2\cos^2 2x$

$=1+2\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x-2\cos^2 2x$

$=\sqrt{3}\sin 4x-\cos 4x$

$=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$. ……………………………………………… (4 分)

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$. ……………………………………… (5 分)

(Ⅱ) 由 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{12}\right]$ 知 $4x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$, ……………………………… (7 分)

则 $\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$, ……………………………………………… (8 分)

则 $2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)\in[-2,1]$,

故函数 $f(x)$ 的值域是 $[-2,1]$. ……………………………………………… (10 分)

18. **解析** (Ⅰ) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q<0)$.

因为 $3a_1$ 为 a_2,a_3 的等差中项,

所以 $6a_1=a_2+a_3$,即 $6a_1=a_1q+a_1q^2$, ……………………………………… (2 分)

又因为 $a_1\neq 0$,所以 $6=q+q^2$,即 $q^2+q-6=0$, ……………………………… (4 分)

所以 $q=-3$(正值舍去). ……………………………………………… (6 分)

所以 $a_n=a_5q^{n-5}=-243\times(-3)^{n-5}=(-3)^n$. ……………………………… (8 分)

(Ⅱ) 由(Ⅰ)得 $b_n=a_{2n}+a_{2n-1}=(-3)^{2n}+(-3)^{2n-1}=9^n-\frac{9^n}{3}=\frac{2}{3}\times 9^n$, ……………… (10 分)

所以 $\{b_n\}$ 是以 6 为首项,9 为公比的等比数列,

所以 $T_n=\frac{6\times(1-9^n)}{1-9}=\frac{3}{4}\times(9^n-1)$. ……………………………… (12 分)

19. **解析** (Ⅰ) 当 $n=1$ 时,$2a_1=3a_1-6$,$\therefore a_1=6$. ……………………………… (1 分)

$\because 2S_n=3a_n-6n(n\in\mathbf{N}^*)$,$\therefore$ 当 $n\geq 2$ 时,$2S_{n-1}=3a_{n-1}-6(n-1)$,

$\therefore 2a_n=3a_n-3a_{n-1}-6$, ……………………………………………………………… (3 分)

$\therefore a_n+3=3(a_{n-1}+3)$, ……………………………………………………………… (5 分)

$\therefore$ 数列$\{a_n+3\}$是以$a_1+3=9$为首项,以3为公比的等比数列. ……………………………… (6 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)得,$a_n+3=9\times 3^{n-1}=3^{n+1}$,即$a_n=3^{n+1}-3$.

$\therefore b_3=a_1=6, b_{12}=a_2=3^3-3=24$. ……………………………………………………… (7 分)

设等差数列$\{b_n\}$的公差为d,则$b_1+2d=6, b_1+11d=24$.

$\therefore b_1=d=2, \therefore b_n=2n$. ……………………………………………………………… (9 分)

$\therefore \dfrac{1}{b_nb_{n+1}}=\dfrac{1}{2n\times 2(n+1)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$. ……………………………………………… (10 分)

$\therefore T_n=\dfrac{1}{4}\left[\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{n}{4n+4}$. ……………… (12 分)

20. **解析** (Ⅰ)由$a\cos C-c\cos(B+C)=-\dfrac{b}{3\cos(A+B)}$,得$a\cos C+c\cos A=\dfrac{b}{3\cos C}$, ……………… (1 分)

由正弦定理得$\sin A\cos C+\sin C\cos A=\dfrac{\sin B}{3\cos C}$, ……………………………………………… (2 分)

所以$\sin(A+C)=\dfrac{\sin B}{3\cos C}$, ……………………………………………………………… (3 分)

所以$\sin B=\dfrac{\sin B}{3\cos C}$, ……………………………………………………………… (4 分)

又$\sin B\neq 0$,所以$\cos C=\dfrac{1}{3}$. ……………………………………………………………… (5 分)

所以$\sin C=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\tan C=\dfrac{\sin C}{\cos C}=2\sqrt{2}$. ……………………………………………………………… (6 分)

(Ⅱ)若$c=3$,由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$,得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{3}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$, ……………… (7 分)

则$a=\dfrac{9\sqrt{2}}{4}\sin A, b=\dfrac{9\sqrt{2}}{4}\sin B$, ……………………………………………………… (8 分)

则$ab=\dfrac{9\sqrt{2}}{4}\sin A\cdot\dfrac{9\sqrt{2}}{4}\sin B=\dfrac{162}{16}\sin A\sin B=\dfrac{162}{16}\times\dfrac{16}{27}=6$, ……………………………… (10 分)

所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 6\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}$. ……………………………………………… (12 分)

21. **解析** (Ⅰ)设$AA_1=a$ dm.

由题意得$(2r)^2-\pi r^2+(2r)^2+8ar=16$, ……………………………………………………… (1 分)

可得$a=\dfrac{16+(\pi-8)r^2}{8r}$. ……………………………………………………………… (2 分)

所以$V=(2r)^2a=8r+\left(\dfrac{\pi}{2}-4\right)r^3$. ……………………………………………………… (3 分)

由$a>0$,得$\dfrac{16+(\pi-8)r^2}{8r}>0$,解得$0<r<\dfrac{4}{\sqrt{8-\pi}}$. ……………………………………… (5 分)

因此$V=8r+\left(\dfrac{\pi}{2}-4\right)r^3, r\in\left(0,\dfrac{4}{\sqrt{8-\pi}}\right)$. ……………………………………………… (6 分)

(Ⅱ)$V'=8+3\left(\frac{\pi}{2}-4\right)r^2$,

令 $V'>0$,得 $0<r<\frac{4}{\sqrt{3(8-\pi)}}$;令 $V'<0$,得 $\frac{4}{\sqrt{3(8-\pi)}}<r<\frac{4}{\sqrt{8-\pi}}$,

所以 V 在 $\left(0,\frac{4}{\sqrt{3(8-\pi)}}\right)$ 上单调递增,在 $\left(\frac{4}{\sqrt{3(8-\pi)}},\frac{4}{\sqrt{8-\pi}}\right)$ 上单调递减. ………………………… (8分)

所以当 $r=\frac{4}{\sqrt{3(8-\pi)}}$ 时,V 取最大值,此时 $a=\frac{\sqrt{3(8-\pi)}}{3}$.

即该容器的高 AA_1 为 $\frac{\sqrt{3(8-\pi)}}{3}$ dm 时,V 取最大值. ………………………… (12分)

22. **解析** (Ⅰ)$f'(x)=\frac{2-(a+1)\ln x}{x^2}$, ………………………… (1分)

(ⅰ)若 $a+1>0$,令 $f'(x)<0$,得 $(a+1)\ln x>2$,可得 $x>e^{\frac{2}{a+1}}$;令 $f'(x)>0$,得 $(a+1)\ln x<2$,可得 $x<e^{\frac{2}{a+1}}$,
所以 $f(x)$ 在 $(0,e^{\frac{2}{a+1}})$ 上单调递增,在 $(e^{\frac{2}{a+1}},+\infty)$ 上单调递减.
(ⅱ)若 $a+1<0$,令 $f'(x)<0$,得 $(a+1)\ln x>2$,可得 $x<e^{\frac{2}{a+1}}$;令 $f'(x)>0$,得 $(a+1)\ln x<2$,可得 $x>e^{\frac{2}{a+1}}$,
所以 $f(x)$ 在 $(0,e^{\frac{2}{a+1}})$ 上单调递减,在 $(e^{\frac{2}{a+1}},+\infty)$ 上单调递增.

(ⅲ)若 $a+1=0$,则 $f'(x)=\frac{2}{x^2}>0$,所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ………………………… (6分)

(Ⅱ)当 $x>1$ 时,$y=f(x)$ 的图象恒在 $y=g(x)$ 的图象的下方,等价于 $f(x)<g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立.

由 $f(x)<g(x)$ 可得 $\frac{(a+1)\ln x+a-1}{x}<a-\frac{1}{x^2}$,整理可得 $(a+1)\ln x+\frac{1}{x}-ax+a-1<0$.

设 $h(x)=(a+1)\ln x+\frac{1}{x}-ax+a-1$,

则 $h'(x)=\frac{a+1}{x}-\frac{1}{x^2}-a=\frac{(1-x)(ax-1)}{x^2}$, ………………………… (8分)

①当 $a\leqslant 0$ 时,因为 $h'(x)>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立,所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数,又因为 $h(1)=0$,所以当 $x\in(1,+\infty)$ 时,总有 $h(x)>0$,不符合题意; ………………………… (9分)

②当 $a\geqslant 1$ 时,因为 $h'(x)<0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立,所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是减函数,又因为 $h(1)=0$,所以当 $x\in(1,+\infty)$ 时,总有 $h(x)<0$,符合题意; ………………………… (10分)

③当 $0<a<1$ 时,令 $h'(x)=0$,解得 $x=\frac{1}{a}$,易知 $h(x)$ 在 $\left(1,\frac{1}{a}\right]$ 上是增函数,在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上是减函数,

又因为 $h(1)=0$,所以当 $x\in\left(1,\frac{1}{a}\right)$ 时,总有 $h(x)>0$,不符合题意. ………………………… (11分)

综上,实数 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$. ………………………… (12分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。