秘密★启用前

巴蜀中学2023届高考适应性月考卷（一）
数 学

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.
2. 每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．在试题卷上作答无效．
3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回．满分150分，考试用时120分钟．

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $P=\{(x,y)|y=2^x\}$，$Q=\{(x,y)|x^2+(y-1)^2=0\}$，则 $P\cup Q=$

A. $\{0,1\}$　　B. $\{(0,1)\}$　　C. P　　D. Q

2. 已知 p：$\frac{x-1}{x+2}\leqslant 0$，$q$：$-2\leqslant x\leqslant 1$，则 p 是 q 的（　　）条件.

A. 充分不必要　　B. 必要不充分

C. 充要　　D. 既不充分也不必要

3. 已知函数 $f(x)=3^x-2f'(1)\ln x$，则 $f'(1)=$

A. $\ln 3$　　B. 2　　C. 3　　D. $3\ln 3$

4. 已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x+\ln(x+1)$，则 $x<0$ 时，$f(x)=$

A. $-x-\ln(1-x)$　　B. $x-\ln(1-x)$

C. $-x+\ln(1-x)$　　D. $x+\ln(1-x)$

5. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导，其导函数为 $f'(x)$，且函数 $y=(x+1)f'(x)$ 的图象如图1所示，则下列结论中正确的是

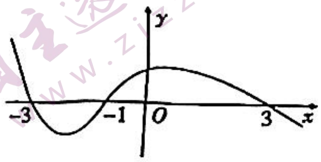

图1

A. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-3)$ 和 $f(3)$

B. 函数 $f(x)$ 有极小值 $f(-3)$ 和 $f(3)$

C. 函数 $f(x)$ 有极小值 $f(3)$ 和极大值 $f(-3)$

D. 函数 $f(x)$ 有极小值 $f(-3)$ 和极大值 $f(3)$

6. 已知正实数 a，b 满足 $\frac{4}{a+b}+\frac{1}{b+1}=1$，则 $a+2b$ 的最小值为

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

7. 现有10张奖券，其中有一、二、三等奖各1张，其余7张无奖．现将这10张奖券随机分发给5名同学，每人2张，则恰有两人获奖的情况数是

A. 30　　B. 60　　C. 90　　D. 120

8. 已知 $a=6^8$，$b=7^7$，$c=8^6$，则 a，b，c 的大小关系为

A. $b>c>a$　　B. $c>b>a$　　C. $a>c>b$　　D. $a>b>c$

二、多项选择题（本大题共4个小题，每小题5分，共20分，在每个给出的四个选项中，有多项是满足要求的，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分）

9. 下列说法正确的是

A. 若事件 M，N 互斥，$P(M)=0.2$，$P(N)=0.6$，则 $P(M\cup N)=0.8$

B. 若 $P(M)=0.4$，$P(N\mid M)=0.15$，则 $P(MN)=0.06$

C. 若 $P(MN)=0.4$，$P(\bar{M}N)=0.5$，则 $P(\bar{N})=0.9$

D. 若 $P(N\mid M)=0.2$，$P(N)=0.2$，则事件 M，N 相互独立

10. 在复习了函数性质后，某同学发现：函数 $y=f(x)$ 为奇函数的充要条件是 $y=f(x)$ 的图象关于坐标原点成中心对称；可以引申为：函数 $y=f(x+a)-b$ 为奇函数，则 $y=f(x)$ 图象关于点 $P(a,\ b)$ 成中心对称. 现在已知函数 $f(x)=2x^3+mx^2+nx+1$ 的图象关于 $(1,\ 0)$ 成中心对称，则下列结论正确的是

A. $f(1)=1$　　B. $f(2)=-1$

C. $m+n=-3$　　D. 对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(1+x)+f(1-x)=0$

11. 如图2，在边长为 $\sqrt{2}$ 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 M 在底面正方形 $ABCD$ 内运动，则下列结论正确的是

A. 存在点 M 使得 $A_1M\perp$ 平面 D_1B_1C

B. 若 $A_1M=2$，则动点 M 的轨迹长度为 $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}$

C. 若 $A_1M/\!/$ 平面 D_1B_1C，则动点 M 的轨迹长度为 $\sqrt{2}$

D. 若 $A_1M\subset$ 平面 A_1DB，则三棱锥 B_1-MD_1C 的体积为定值

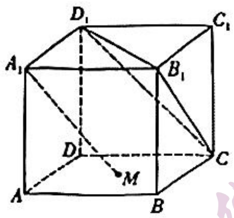

图 2

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1},\ x<1,\\[2mm] \dfrac{5\ln x}{x},\ x\geqslant 1,\end{cases}$ 下列选项正确的是

A. 函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty,\ 1)$，$(e,\ +\infty)$

B. 函数 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,\ 1)$

C. 若关于 x 的方程 $f^2(x)-a|f(x)|=0$ 有3个不相等的实数根，则实数 a 的取值范围是 $\left(\dfrac{5}{e},\ +\infty\right)$

D.. 若关于 x 的方程 $f^2(x)-a|f(x)|=0$ 有5个不相等的实数根，则实数 a 的取值范围是 $\left[1,\ \dfrac{5}{e}\right)$

三、填空题（本大题共4个小题，每小题5分，共20分）

13. 化简 $\left(\dfrac{1}{8}\right)\ \ -\log_2 5\cdot\log_5 8=$ ________.

14. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$，$f(1)=3$，则 $f(2023)=$ ________.

15. 设抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线 l 与 x 轴的交点为 K，点 A 在 C 上，已知点 A 的横坐标为 $\sqrt{2}$，$|AF|=2\sqrt{2}$，则 $\triangle AKF$ 的面积 $S_{\triangle AKF}=$ ________.

16. 已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，当 $x>0$ 时，$2f(x)+f'(x)>0$，且 $f(2)=0$，则不等式 $f(x)>0$ 的解集为 ________.

四、解答题（本大题共6个小题，共70分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分10分）

已知函数$f(x)=x\ln x+ax+b$在$x=e$时取得极小值$1-e$，其中$e=2.718\cdots$是自然对数的底数.

（1）求实数a，b的值；

（2）若曲线$y=f(x)$在点$(t,f(t))$处的切线过原点$(0,0)$，求实数t的值.

18.（本小题满分12分）

炎炎夏日，酷暑难耐！一种新型的清凉饮料十分畅销，如图3是某商店7月1日至15日售卖该种饮料的累计销售量(单位：十瓶)的散点图：

（参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{15}y_i=970$，$\sum\limits_{i=1}^{15}x_i^2=1240$，$\sum\limits_{i=1}^{15}x_iy_i=9979$）

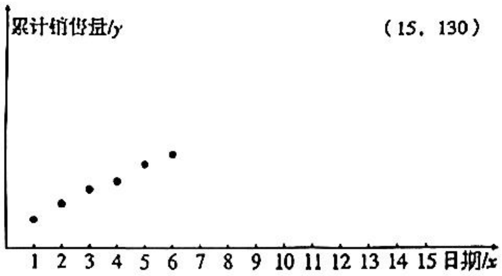

图3

（1）由散点图可知，15日的数据偏差较大，请用前14组数据求出累计销售量y(单位：十瓶）关于日期x(单位：日）的经验回归方程；

（2）请用（1）中求出的经验回归方程预测该商店9月份（共30天）售卖这种饮料的累计销售量.

附：经验回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：

$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}，\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}.$$

19.（本小题满分12分）

如图4，在多面体$ABCDEF$中，四边形$ABCD$是一个矩形，$EF//AC$，$AC=2EF$，$AB=AE=2$，$AD=4$，$\angle BAE=120°$.

（1）求证：$AE//$平面BFD；

（2）若平面$EAB\perp$平面$ABCD$，求平面EAB与平面FCD的夹角的余弦值.

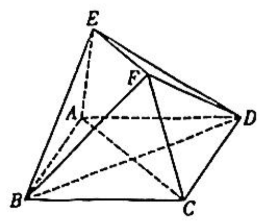

图4

20.（本小题满分 12 分）

某大型名胜度假区集旅游景点、酒店餐饮、休闲娱乐于一体，极大带动了当地的经济发展. 为了完善度假区的服务工作，进一步提升景区品质. 现从某天的游客中随机抽取了 500 人，按他们的消费金额（元）进行统计，得到如图 5 所示的频率分布直方图.

（1）求直方图中 a 的值；

（2）估计该度假区 2000 名游客中，消费金额低于 1000 元的人数；

（3）为了刺激消费，回馈游客，该度假区制定了两种抽奖赠送代金券（单位：元）的方案（如下表），

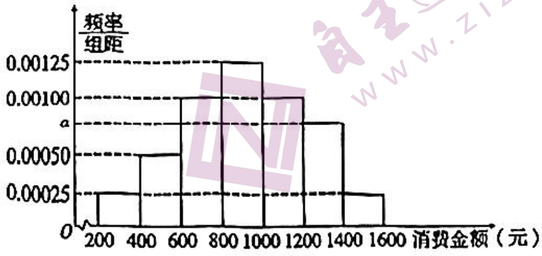

图 5

方案 A

代金券金额	50	100
概率	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

方案 B

代金券金额	0	100
概率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

抽奖规则如下：①消费金额低于 1000 元的游客按方案 A 抽奖一次；

②消费金额不低于 1000 元的游客按方案 B 抽奖两次.

记 X 为所有游客中的任意一人抽奖时获赠的代金券金额，用样本的频率代替概率，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$.

21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过点$(-\sqrt{2},1)$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）已知 A，B 分别是椭圆 C 的左、右顶点，M 是直线 $x=2$ 上不与 B 点重合的任意一点，O 是坐标原点，与直线 OM 垂直的直线 BP 与 C 的另一个交点为 P. 求证：A，P，M 三点共线.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=a\ln x-2x(a\neq0)$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $x>0$ 时，不等式 $\frac{x^a}{e^{2x}}-2f(x)\geqslant\cos[f(x)]$ 恒成立，求 a 的取值范围.

巴蜀中学2023届高考适应性月考卷（一）

数学参考答案

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	A	C	D	B	B	D

【解析】

1．$Q=\{(0,\ 1)\}$，而 $y=2^x$ 过点 $(0,\ 1)$，所以 $P\cup Q=P$，故选C.

2．p: $-2<x\leqslant 1$，所以 p 是 q 的充分不必要条件，故选A.

3．$\because f'(x)=3^x\ln 3-\dfrac{2f'(1)}{x}$，$\therefore f'(1)=3\ln 3-2f'(1)$，$\therefore f'(1)=\ln 3$，故选A.

4．设 $x<0$，则 $-x>0$，则 $f(-x)=-x+\ln(1-x)$，因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，于是有 $f(x)=-x+\ln(1-x)$，故选C.

5．由图象可知，$x=\pm 3$ 是 $f'(x)=0$ 的两个根，当 $x<-3$ 时，$x+1<0$，$y=(x+1)f'(x)>0$，则 $f'(x)<0$，当 $-3<x<-1$ 时，$x+1<0$，$y=(x+1)f'(x)<0$，则 $f'(x)>0$，故 $f(-3)$ 是 $f(x)$ 的极小值；同理可得，$f(3)$ 是 $f(x)$ 的极大值，故选D.

6．$a+2b=[(a+b)+(b+1)]\left(\dfrac{4}{a+b}+\dfrac{1}{b+1}\right)-1=\left(5+\dfrac{4(b+1)}{a+b}+\dfrac{a+b}{b+1}\right)-1\geqslant 5+2\sqrt{\dfrac{4(b+1)}{a+b}\cdot\dfrac{(a+b)}{b+1}}-1=8$，当且仅当 $a+b=2(b+1)=6$ 时取等，故选B.

7．先将一、二、三等奖这3张奖券分成两组，共 $C_3^2=3$ 种情况，再将这两组分给5名同学中的任意2人，共有 $3\times A_5^2=60$ 种情况，其余用无奖的奖券补齐，所以共有60种不同的获奖情况数，故选B.

8．因为 $\ln a=8\ln 6$，$\ln b=7\ln 7$，$\ln c=6\ln 8$，于是设 $f(x)=(14-x)\ln x$，令 $f'(x)=-\ln x+\dfrac{14-x}{x}$ $=-\ln x+\dfrac{14}{x}-1$（单减），当 $x\geqslant 6$ 时，$f'(x)<0$ 恒成立，所以 $f(x)=(14-x)\ln x$ 在 $x\geqslant 6$ 时单调递减，所以 $\ln a>\ln b>\ln c$，即 $a>b>c$，故选D.

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11	12
答案	ABD	BCD	BD	ACD

【解析】

9．因为 M，N 互斥，所以 $P(M\cup N)=P(M)+P(N)=0.8$，故 A 正确；$P(MN)=P(M)\cdot P(N|M)=0.4\times0.15=0.06$，故 B 正确；$P(N)=P(MN)+P(\overline{M}N)=0.9$，则 $P(\overline{N})=0.1$，故 C 错误；$P(N)=0.2=P(N|M)=\dfrac{P(MN)}{P(M)}$，即有 $P(MN)=P(M)P(N)$，故 D 正确，故选 ABD．

10．因为 $f(x)$ 关于 $(1,\ 0)$ 成中心对称，则 $f(1+x)+f(1-x)=0$，故 D 正确；在上式中令 $x=0$，则 $f(1)=0$，故 A 错误；由 $f(1)=0$，代入函数解析式得 $2+m+n+1=0$，则 $m+n=-3$，故 C 正确；容易发现 $f(0)=1$，关于点 $(1,\ 0)$ 对称可得 $f(2)=-1$，故 B 正确，故选 BCD．

11．易证 $AC_1\perp$ 平面 D_1B_1C，而 A_1M 不可能与 AC_1 平行，故 A 错误；连接 AM，当 $A_1M=2$ 时，算出 $AM=\sqrt{2}$，即点 M 在以 A 为圆心，$r=\sqrt{2}$ 的 $\dfrac{1}{4}$ 圆弧上，则轨迹长度为 $\dfrac{1}{4}\times2\pi\times\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}$，故 B 正确；易证平面 A_1DB // 平面 D_1B_1C，则 M 点的轨迹为 BD，其长度为 2，故 C 错误；由选项 C 值，当 $A_1M\subset$ 平面 A_1DB 时，因为平面 A_1DB // 平面 D_1B_1C，所以点 M 到平面 D_1B_1C 的距离为定值 h，又 $\triangle D_1B_1C$ 的面积为定值，则 $V_{B_1-MD_1C}=V_{M-D_1B_1C}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle D_1B_1C}\cdot h$ 为定值，故 D 正确，故选 BD．

12．当 $x<1$ 时，$f(x)=1+\dfrac{1}{x-1}$ 在 $(-\infty,\ 1)$ 上单调递减，且值域为 $(-\infty,\ 1)$；求导可得 $f(x)=\dfrac{5\ln x}{x}$ 在 $(1,\ e)$ 上单增，在 $(e,\ +\infty)$ 上单减，$y_{\max}=f(e)=\dfrac{5}{e}$，故 A 正确，

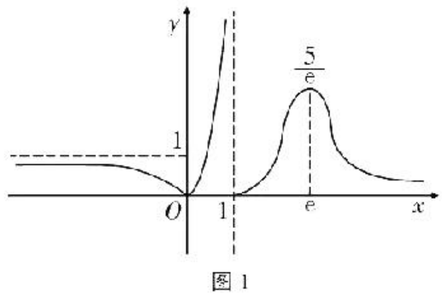

图 1

B 错误；令 $|f(x)|=t$，方程 $t^2-at=0$ 的两根为 $t_1=0$，$t_2=a$，如图 1，结合 $y=|f(x)|$ 的

图象：$|f(x)|=t_1=0$ 有 2 个实数根，当 $|f(x)|=t_2=a$ 有 1 个不相等的实数根时，$a>\frac{5}{e}$，故 C 正确；当 $|f(x)|=t_2=a$ 有 3 个不相等的实数根时，$1\leqslant a<\frac{5}{e}$，故 D 正确，故选 ACD.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	13	-3	4	$(-2,\ 0)\cup(2,\ +\infty)$

【解析】

13．原式 $(2^3)^{\frac{4}{3}}-3\log_2 5\cdot\log_5 2=16-3=13$．

14．由 $f(x+2)=-f(x)$ 可得周期 $T=4$，则 $f(2023)=f(3)=-f(1)=-3$．

15．由 $x_A=\sqrt{2}$，$|AF|=2\sqrt{2}=x_A+\frac{p}{2}$ 可得：$p=2\sqrt{2}$，于是抛物线的方程为 $y^2=4\sqrt{2}x$，所以 $y_A^2=4\sqrt{2}x_A=8$，则 $|y_A|=2\sqrt{2}$，所以 $S_{\triangle AKF}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=4$．

16．设 $F(x)=e^{2x}\cdot f(x)$，则当 $x>0$ 时，$F'(x)=e^{2x}[2f(x)+f'(x)]>0$，所以 $F(x)=e^{2x}\cdot f(x)$ 在 $x>0$ 时单调递增，又 $F(2)=e^4\cdot f(2)=0$，所以当 $x>2$ 时，$F(x)=e^{2x}\cdot f(x)>0$，从而 $f(x)>0$，当 $0<x<2$ 时，$F(x)=e^{2x}\cdot f(x)<0$，从而 $f(x)<0$，又奇函数 $f(x)$ 的图象关于原点中心对称，所以 $f(x)>0$ 的解集为 $(-2,\ 0)\cup(2,\ +\infty)$．

四、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 10 分）

解：（1）由 $f(x)=x\ln x+ax+b$ 得，$f'(x)=\ln x+1+a$，

因为 $f(x)$ 在 $x=e$ 处取得极小值 $1-e$，

则 $\begin{cases}f'(e)=2+a=0,\\ f(e)=e+ae+b=1-e\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2,\\ b=1,\end{cases}$ 经检验，符合题意． ……………………（5 分）

（2）由（1）知，$f(x)=x\ln x-2x+1$，$f'(x)=\ln x-1$，则切点为 $(t,\ t\ln t-2t+1)$，

切线斜率 $k=f'(t)=\ln t-1$，于是切线方程为 $y-(t\ln t-2t+1)=(\ln t-1)(x-t)$，

代入原点 $(0,\ 0)$ 得：$-t\ln t+2t-1=-t\ln t+t$，解得 $t=1$，

从而实数 t 的值为 1． ……………………………………………………………（10 分）

18.（本小题满分 12 分）

解：（1）由题意，去掉15日的数据(15，130)后，$\bar{x}=7.5$，$\sum_{i=1}^{14}x_i^2=\sum_{i=1}^{15}x_i^2-15^2=1015$，

$\bar{y}=\frac{1}{14}(\sum_{i=1}^{15}y_i-130)=\frac{1}{14}(970-130)=60$，…………………………………………（2 分）

$\sum_{i=1}^{14}x_iy_i=\sum_{i=1}^{15}x_iy_i-15\times130=9979-1950=8029$，

所以$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{14}x_iy_i-14\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{14}x_i^2-14\bar{x}^2}=\dfrac{8029-14\times7.5\times60}{1015-14\times7.5^2}=\dfrac{1729}{227.5}=7.6$，……………………（6 分）

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=60-7.6\times7.5=3$，

从而y关于x的经验回归方程为$\hat{y}=7.6x+3$．…………………………………………（9 分）

（2）9月份一共有30天，于是累计销售量$\hat{y}=10(7.6\times30+3)=2310$瓶．

…………………………………………………………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

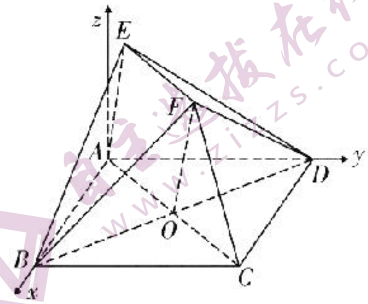

图 2

（1）证明：如图 2，设O是AC与BD的交点，连接FO，

因为四边形$ABCD$是一个矩形，所以O是AC的中点，

因为$EF/\!/AC$，$AC=2EF$，于是$EF\underline{/\!/}AO$，

所以四边形$AEFO$是一个平行四边形，

于是$AE/\!/FO$，又$AE\not\subset$平面BFD，$FO\subset$平面BFD，

所以$AE/\!/$平面BFD．…………………………………………………（6 分）

（2）解：在平面EAB内作$Az\perp AB$，因为平面$EAB\perp$平面$ABCD$，

平面$EAB\cap$平面$ABCD=AB$，所以$Az\perp$平面$ABCD$，又矩形中$AD\perp AB$，

于是以A为原点，AB，AD，Az所在的直线为x轴，y轴，z轴，建立如图所示的空间直角坐标系．

因为$AB=AE=2$，$AD=4$，$\angle BAE=120°$，所以$E(-1,0,\sqrt{3})$，$D(0,4,0)$，$C(2,4,0)$，

由$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{EF}$可得：$F(0,2,\sqrt{3})$．…………………………………（8 分）

显然，平面EAB的一个法向量为$\vec{m}=(0,1,0)$；

设平面 FCD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,\ y,\ z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CF}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x-2y+\sqrt{3}z=0,\\ -2x=0,\end{cases}$

令 $y=\sqrt{3}$ 可得，$\vec{n}=(0,\ \sqrt{3},\ 2)$． ………………………………………………（10 分）

设平面 EAB 与平面 FCD 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=|\cos\langle\vec{m},\ \vec{n}\rangle|=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{1}\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

于是平面 EAB 与平面 FCD 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$． ……………………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

解：（1）由 $200\times(0.00025\times2+0.0005+a+0.001\times2+0.00125)=1$，解得 $a=0.00075$．

………………………………………………（3 分）

（2）由直方图可知，消费金额低于1000 元的频率为：

$200\times(0.00025+0.0005+0.001+0.00125)=0.6$，

于是估计该度假区 2000 名游客中消费金额低于 1000 元的人数有 $2000\times0.6=1200$ 人．

………………………………………………（6 分）

（3）由（2）知，对于该度假区的任意一位游客，消费金额低于1000 元的概率为 $\dfrac{3}{5}$，

不低于1000 元的概率为 $\dfrac{2}{5}$，获赠的代金券金额 X 的可能取值为 0，50，100，200，

因为 $P(X=0)=\dfrac{2}{5}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{10}$，$P(X=50)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{5}$，

$P(X=100)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{5}\cdot C_2^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{5}$，$P(X=200)=\dfrac{2}{5}\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{10}$，

………………………………………………（10 分）

所以 X 的分布列为

X	0	50	100	200
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

于是 $E(X)=0+50\times\dfrac{1}{5}+100\times\dfrac{3}{5}+200\times\dfrac{1}{10}=90$． ……………………（12 分）

21.（本小题满分 12 分）

（1）解：由题意，$\begin{cases} \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$ 可得：$a^2=2b^2$，

将点$(\sqrt{2}, 1)$代入方程$\dfrac{x^2}{2b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$可得，$b^2=2$，$a^2=4$，

所以椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$. ……………………………………………………（4 分）

（2）证明：设 $M(2, n)$，则：$k_{OM}=\dfrac{n}{2}$，$k_{BP}=-\dfrac{2}{n}$，

又 $B(2, 0)$，则直线 BP 的方程为 $y=-\dfrac{2}{n}(x-2)$，

联立椭圆方程$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$消 y 得：$(n^2+8)x^2-32x+32-4n^2=0$，其中 $\Delta>0$ 恒成立，

由韦达定理，$x_Px_B=\dfrac{32-4n^2}{n^2+8}$， ……………………………………………………（6 分）

因为 $x_B=2$，所以 $x_P=\dfrac{16-2n^2}{n^2+8}$，于是 $y_P=-\dfrac{2}{n}(x_P-2)=\dfrac{8n}{n^2+8}$，又 $A(-2, 0)$，

因为 $k_{AP}-k_{AM}=\dfrac{\dfrac{8n}{n^2+8}-0}{\dfrac{16-2n^2}{n^2+8}+2}-\dfrac{n}{4}=\dfrac{8n}{32}-\dfrac{n}{4}=0$，所以 $k_{AP}=k_{AM}$，

又 A 是公共点，故 A，P，M 三点共线. …………………………………（12 分）

22.（本小题满分 12 分）

解：（1）由题意，$f(x)$ 的定义域为$(0, +\infty)$，又 $f'(x)=\dfrac{a}{x}-2$，

当 $a<0$ 时，因为 $x>0$，所以 $f'(x)=\dfrac{a}{x}-2<0$，故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减；

……………………………………………………（2 分）

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=\dfrac{a}{x}-2=0$，解得：$x=\dfrac{a}{2}$，

当 $x\in\left(0, \dfrac{a}{2}\right)$，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $\left(0, \dfrac{a}{2}\right)$ 上单调递增，

当 $x\in\left(\frac{a}{2},\ +\infty\right)$，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $\left(\frac{a}{2},\ +\infty\right)$ 上单调递减.

……………………………………………（5 分）

（2）$\frac{x^a}{e^{2x}}-2f(x)\geqslant\cos[f(x)]\Leftrightarrow e^{a\ln x-2x}-2f(x)\geqslant\cos[f(x)]\Leftrightarrow e^{f(x)}-2f(x)-\cos[f(x)]$

$\geqslant 0$，

设 $g(t)=e^t-2t-\cos t$，其中 $t=f(x)$，……………………………………（6 分）

则 $g'(t)=e^t-2+\sin t$，$g''(t)=e^t+\cos t$，

当 $t\leqslant 0$ 时，$e^t\leqslant 1$，$\sin t\leqslant 1$，则 $g'(t)\leqslant 0$ 恒成立；

当 $t>0$ 时，$e^t>1$，$\cos t\geqslant -1$，则 $g''(t)>0$ 恒成立，即 $g'(t)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递增，

又 $g'(0)=-1<0$，$g'(1)=e-2+\sin 1>0$，所以存在 $t_0\in(0,\ 1)$ 使得 $g'(t_0)=0$，

于是当 $t\in(0,\ t_0)$ 时，$g'(t)<0$；当 $t\in(t_0,\ +\infty)$ 时，$g'(t)>0$.

从而可得，$g(t)$ 在 $(-\infty,\ t_0)$ 上单调递减，在 $(t_0,\ +\infty)$ 上单调递增，

且发现 $g(0)=0$，其大致图象如图 3 所示：……………………………………（8 分）

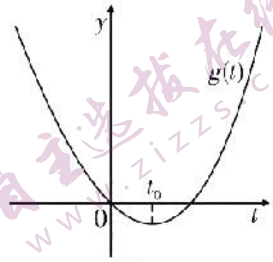

图 3

由（1）中 $f(x)$ 的单调性可知，

①当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递减，当 $x\to 0$ 时，

$f(x)\to+\infty$；而 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，

所以 $t=f(x)\in\mathbf{R}$，此时 $g(t_0)<0$，不符题意；………………（9 分）

②当 $a>0$ 时，$f(x)_{\max}=f\left(\frac{a}{2}\right)=a\ln\frac{a}{2}-a$，又当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to-\infty$，

此时 $t=f(x)\in\left(-\infty,\ a\ln\frac{a}{2}-a\right]$，

（i）当 $a\ln\frac{a}{2}-a\leqslant 0$，即 $0<a\leqslant 2e$ 时，$g(t)\geqslant 0$ 恒成立，满足题意；

（ii）当 $a\ln\frac{a}{2}-a>0$，即 $a>2e$ 时，取 $t_1=\min\left\{a\ln\frac{a}{2}-a,\ t_0\right\}$，

结合 $g(t)$ 的图象可知 $g(t_1)<0$，不符题意.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(0,\ 2e]$.……………………………（12 分）