学校______ 班级______ 姓名______ 准考证号______ 考场号______ 座位号______

密 封 线 内 不 要 答 题

绝密★启用前

数　　学

全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并收回。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 $z=(2-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})$，其中 i 为虚数单位，则复数 z 在复平面内所对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

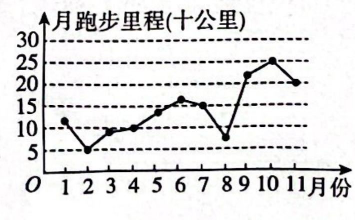
2. 已知集合 $A=\{x|x^2-3x-4\leqslant 0\}$，$B=\{x|1-x\leqslant x+1\leqslant 11-x\}$，则 $A\cap B=$

A. $[-1,0]$　　B. $[0,4]$　　C. $[0,5]$　　D. $[-1,5]$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$，则 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$

A. $\sqrt{37}$　　B. $\sqrt{39}$　　C. $2\sqrt{10}$　　D. $2\sqrt{11}$

4. 4 月 26 日，2023 北京大兴半程马拉松暨第七届“花绘北京 悦跑大兴”半程马拉松赛新闻发布会举行. 此次赛事由北京市大兴区人民政府主办，大兴区体育局、大兴区魏善庄镇人民政府共同承办，将于 5 月 21 日鸣枪开跑. 据了解，本届赛事赛道起、终点设在魏庄村，赛道途经北京市半壁店村，穿过北京月季文化产业园、中国古老月季园、宜德源田野文化园等多个月季主题园区和森林氧吧，选手可在奔跑过程中，感受月季为小镇带来的变化. 小张为参加“花绘北京 · 悦跑大兴”半程马拉松赛，每天坚持健身运动. 依据小张 2022 年 1 月至 2022 年 11 月期间每月跑步的里程(单位：十公里)数据，整理并绘制成折线图，根据该折线图，下列结论正确的是



A. 月跑步里程逐月增加

B. 月跑步里程的极差小于 18

C. 月跑步里程的 60% 分位数为 7 月份对应的里程数

D. 1 月至 5 月的月跑步里程的方差相对于 6 月至 11 月的月跑步里程的方差更大

5. 将曲线 $f(x)=x^3+\sqrt{2}\sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象，若 $g(x)$ 的图象与直线 $y=2x-\frac{\pi}{2}$ 有 3 个交点，则这 3 个交点的横坐标之和为

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{3\pi}{4}$　　C. π　　D. $\frac{3\pi}{2}$

6. 科技是一个国家强盛之根，创新是一个民族进步之魂，科技创新铸就国之重器，极目一号（如图 1）是中国科学院空天信息研究院自主研发的系留浮空器. 2022 年 5 月，"极目一号"Ⅲ型浮空艇成功完成 10 次升空大气科学观测，最高升空至 9050 米，超过珠穆朗玛峰，创造了浮空艇大气科学观测海拔最高的世界纪录，彰显了中国的实力. "极目一号"Ⅲ型浮空艇长 55 米，高 19 米，若将它近似看作一个半球、一个圆柱和一个圆台的组合体，正视图如图 2 所示，则"极目一号"Ⅲ型浮空艇的表面积约为

（参考数据：$\frac{\sqrt{4258}}{2}\approx 32.6$，$\pi\approx 3.14$）

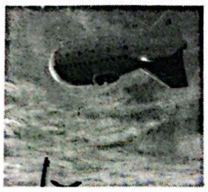


图 1

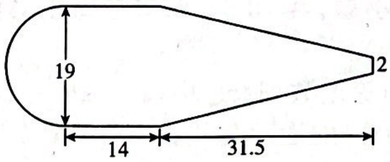


图 2

A. 2480 m^2　　B. 2498 m^2　　C. 2502 m^2　　D. 2508 m^2

7. 已知 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{3}$，$\tan\alpha-\tan\beta=3\sqrt{3}$，则 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{1}{4}$　　D. $-\frac{1}{6}$

8. 已知 $a=e^{0.1}$，$b=1.2-\ln 1.1$，$c=\sqrt{1.21}$，其中 e 为自然对数的底数，则 a,b,c 的大小关系为

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $a>c>b$　　D. $b>c>a$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$，则

A. $A=\frac{\pi}{6}$　　B. 若 $B=\frac{\pi}{4}$，则 $\sqrt{3}b=\sqrt{2}a$

C. 若 $a=\sqrt{3}$，$b+c=3$，则 $bc=2$　　D. 若 $a=2$，则 $\triangle ABC$ 的面积的最小值为 $\sqrt{3}$

10. 已知抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 在直线 $y=2x-1$ 上，点 P 在抛物线上，点 Q 在准线 l 上，满足 $PQ\parallel x$ 轴，$|PQ|=|QF|$，则

A. $p=1$　　B. 直线 PF 的倾斜角为 60°

C. $|PF|=2$　　D. 点 P 的横坐标为 3

11. 随机投掷一枚质地均匀的正方体骰子两次，记录朝上一面的点数. 设事件 A="第一次为偶数"，B="第二次为偶数"，C="两次点数之和为偶数"，则

A. $P(A)=1-P(B)$　　B. A 与 B 对立　　C. B 与 C 相互独立　　D. $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$

12. 若一条直线与两条或两条以上的曲线均相切，则称该直线为这些曲线的公切线，已知直线 $l: y=kx+b$ 为曲线 $C_1: y=ae^x\,(a>0)$ 和 $C_2: y=\ln\frac{x}{a}\,(a>0)$ 的公切线，则下列结论正确的是

A. 曲线 C_1 的图象在 x 轴的上方

B. 当 $a=1$ 时，$\ln k+b=-1$

C. 若 $b=0$，则 $a=\frac{1}{\sqrt{e}}$

D. 当 $a=1$ 时，C_1 和 C_2 必存在斜率为 $\frac{1}{k}$ 的公切线

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 二项式 $\left(x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中含 x^5 的系数为________.

14. 写出一个与两坐标轴和圆 $C: x^2+y^2-6x-2y+9=0$ 都相切的一个圆的标准方程为________.

15. 已知 P 为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 表面上的动点，若 $AB=2$，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，则当 DP 取最小值时，$\dfrac{DP^2}{AP^2}=$________.

16. 已知双曲线 $E:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，若 E 上存在点 P，满足 $|OP|=\dfrac{1}{2}|F_1F_2|$（$O$ 为坐标原点），且 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的半径等于 $2a$，则双曲线 E 的离心率为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

在等比数列 $\{a_n\}$ 和等差数列 $\{b_n\}$ 中，$a_1=2b_1=2$，$a_2=2b_2$，$a_3=2b_3+2$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2)令 $c_n=\dfrac{b_n^2}{a_n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项积为 T_n，证明：$T_n\leqslant\dfrac{9}{16}$.

18.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$ 上单调，其中 $\omega>0$，$0<\varphi<\pi$，且 $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

(1)求 $y=f(x)$ 的图象的一个对称中心的坐标；

(2)若点 $P\left(-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在函数 $f(x)$ 的图象上，求函数 $f(x)$ 的表达式.

19.（本小题满分 12 分）

铅球起源于古代人类用石块猎取禽兽或防御攻击的活动. 现代推铅球始于 14 世纪 40 年代欧洲炮兵闲暇期间推掷炮弹的游戏和比赛，后逐渐形成体育运动项目. 男、女铅球分别于 1896 年、1948 年被列为奥运会比赛项目. 为了更好地在中小学生中推广推铅球这项体育运动，某教育局对该市管辖内的 42 所高中的所有高一男生进行了推铅球测试，测试结果表明所有高一男生的成绩 X（单位：米）近似服从正态分布 $N(9,\sigma^2)$，且 $P(X<7.4)=\dfrac{1}{15}$，$P(10<X<10.6)=\dfrac{1}{10}$.

(1)若从所有高一男生中随机挑选 1 人，求他的推铅球测试成绩在 $(8,10)$ 范围内的概率；

(2)从所有高一男生中随机挑选 4 人，记这 4 人中推铅球测试成绩在 $(8,10)$ 范围内的人数为 Y，求 Y 的分布列和方差；

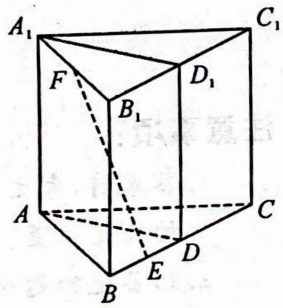
(3)某高一男生进行推铅球训练，若推 n（n 为正整数）次铅球，期望至少有 21 次成绩在 $(8,10)$ 范围内，请估计 n 的最小值.

20.(本小题满分 12 分)

如图,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,D,D_1,F 分别是 BC,B_1C_1,A_1B_1 的中点,$\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{BE}$,$AB=2$.

(1)证明:$B_1C_1\perp EF$;

(2)若三棱柱的高为 1,求二面角 $B-EF-C_1$ 的正弦值.



21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{2}{x+a}+\ln x(a\geqslant 0)$.

(1)当 $a=0$ 时,求函数 $f(x)$的极值;

(2)若 $\sqrt{ax}\geqslant f(x)$恒成立,求实数 a 的取值范围.

22.(本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{2}=1(a>\sqrt{2})$与椭圆 $C_2:x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$,且椭圆 C_2 过椭圆 C_1 的焦点.过点 $P(0,t)(t\in(0,\sqrt{2}))$且不与坐标轴平行或重合的直线 l 与椭圆 C_1 交于 A,B 两点,与椭圆 C_2 交于 C,D 两点.

(1)求椭圆 C_1 的标准方程;

(2)若存在直线 l,使得$|AB|=\sqrt{3}|CD|$,求实数 t 的取值范围.