

2023 届高三年级 5 月份大联考

数学试题

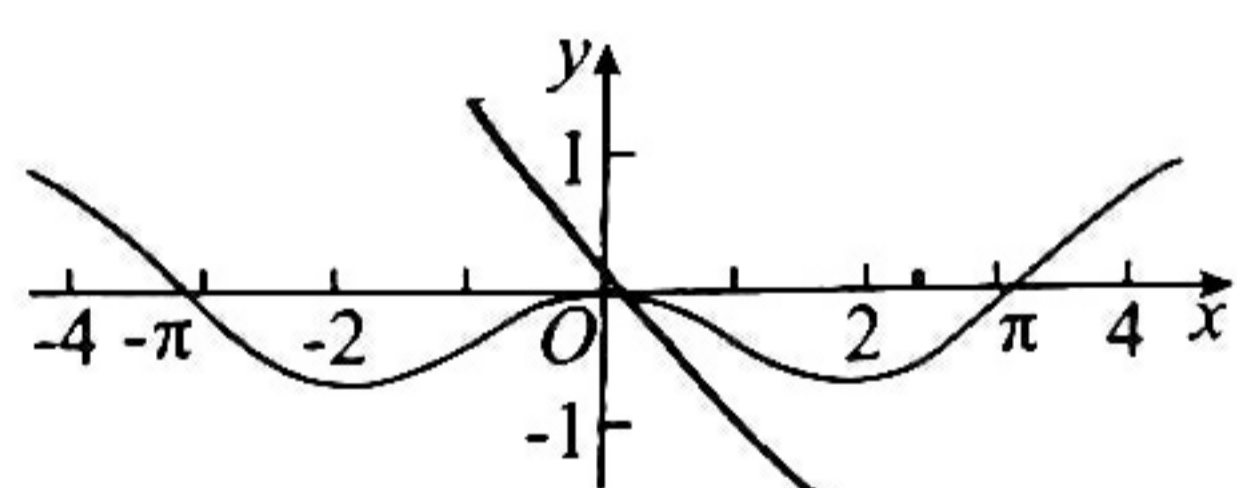
本试卷共 4 页, 22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

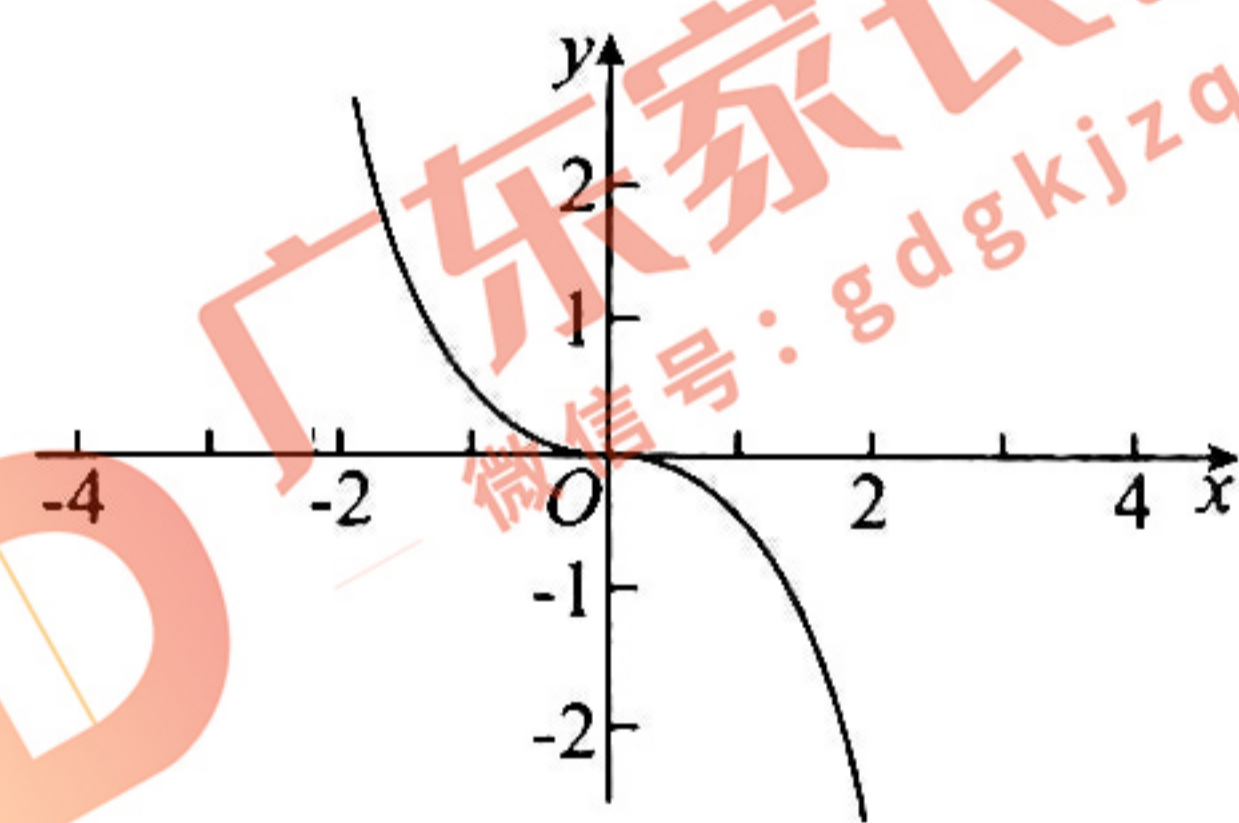
1. 答题前, 先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答: 用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后, 请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、单选题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

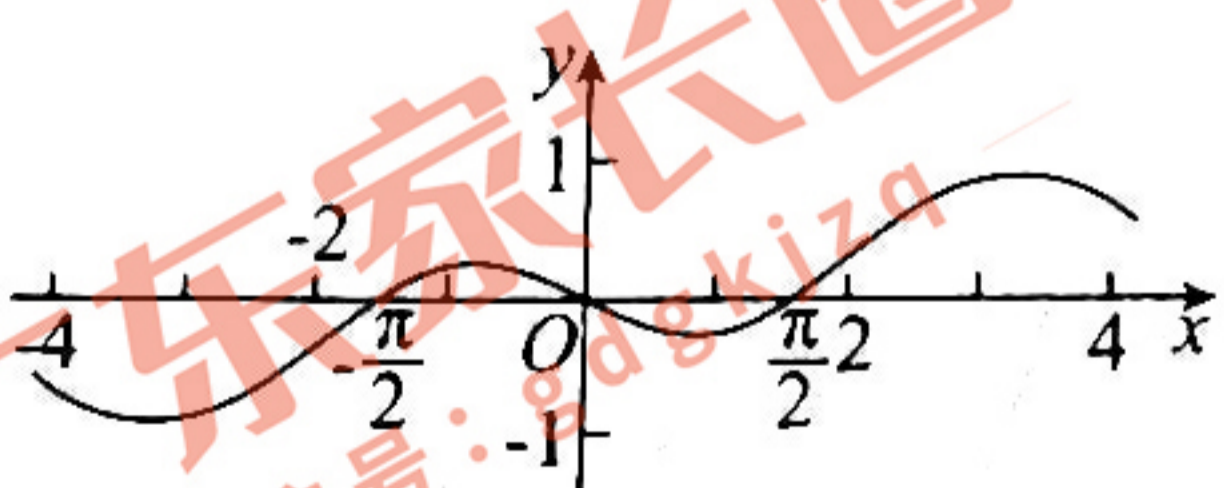
1. 设复数 z 满足 $z(1+2i) = |1+2\sqrt{6}i|$, 则 z 的虚部为
 A. $-2i$ B. $2i$ C. -2 D. 2
2. 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid -1 < x < 3\}$, $B = \{x \mid 3x - a < 0\}$, 且 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \{1, 2\}$, 则 a 的取值范围为
 A. $(0, 4)$ B. $(0, 4]$
 C. $(0, 3]$ D. $(0, 3)$
3. 对两组变量进行回归分析, 得到不同的两组样本数据, 第一组对应的相关系数, 残差平方和, 决定系数分别为 r_1, S_1^2, R_1^2 , 第二组对应的相关系数, 残差平方和, 决定系数分别为 r_2, S_2^2, R_2^2 , 则
 A. 若 $r_1 > r_2$, 则第一组变量比第二组的线性相关关系强
 B. 若 $r_1^2 > r_2^2$, 则第一组变量比第二组的线性相关关系强
 C. 若 $S_1^2 > S_2^2$, 则第一组变量比第二组变量拟合的效果好
 D. 若 $R_1^2 > R_2^2$, 则第二组变量比第一组变量拟合的效果好
4. 函数 $f(x) = \left(\frac{2}{1+e^x} - 1\right) \cos x$ 的部分图象为



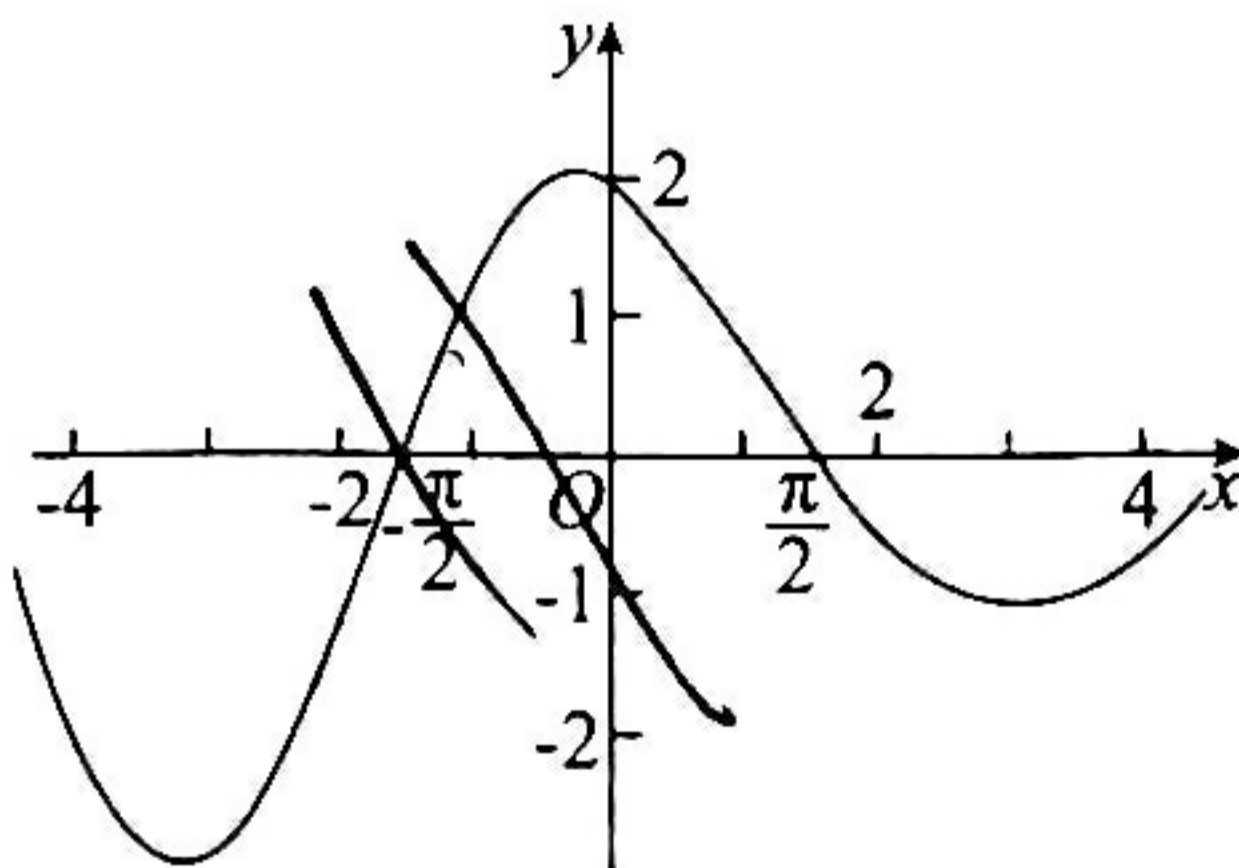
A.



B.



C.

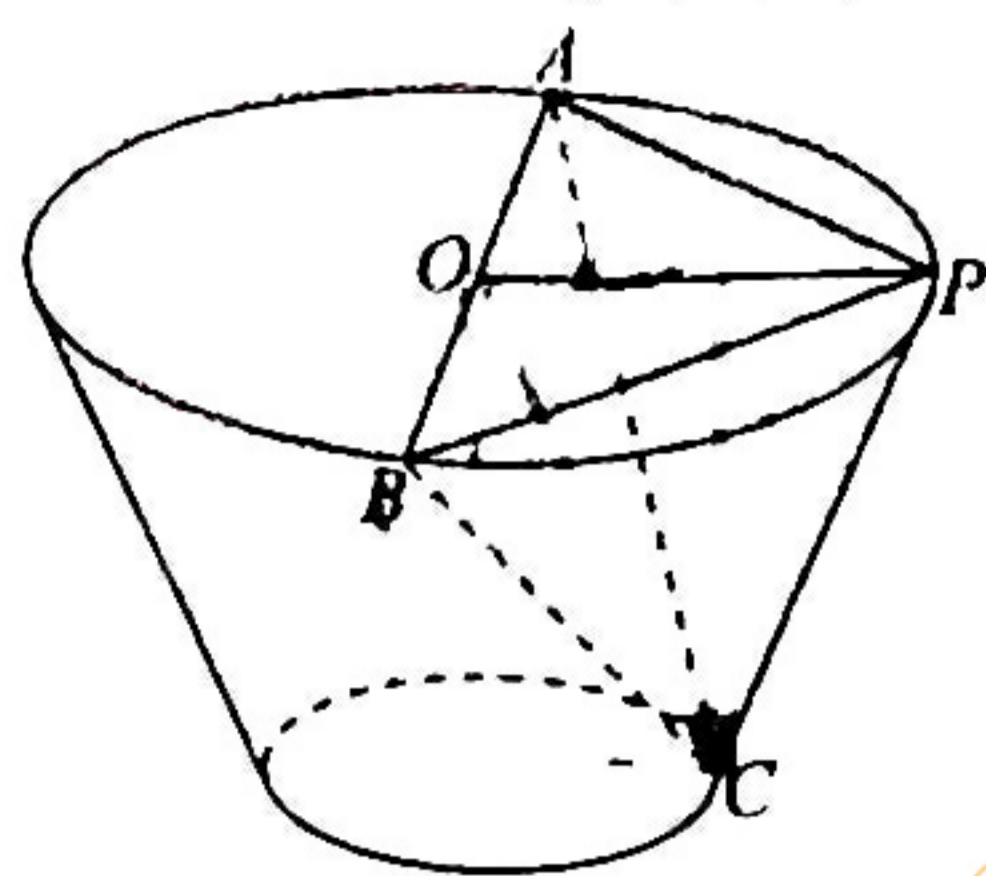


D.

5. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 且 $b=1, \cos A - a \cos B = a$, 则

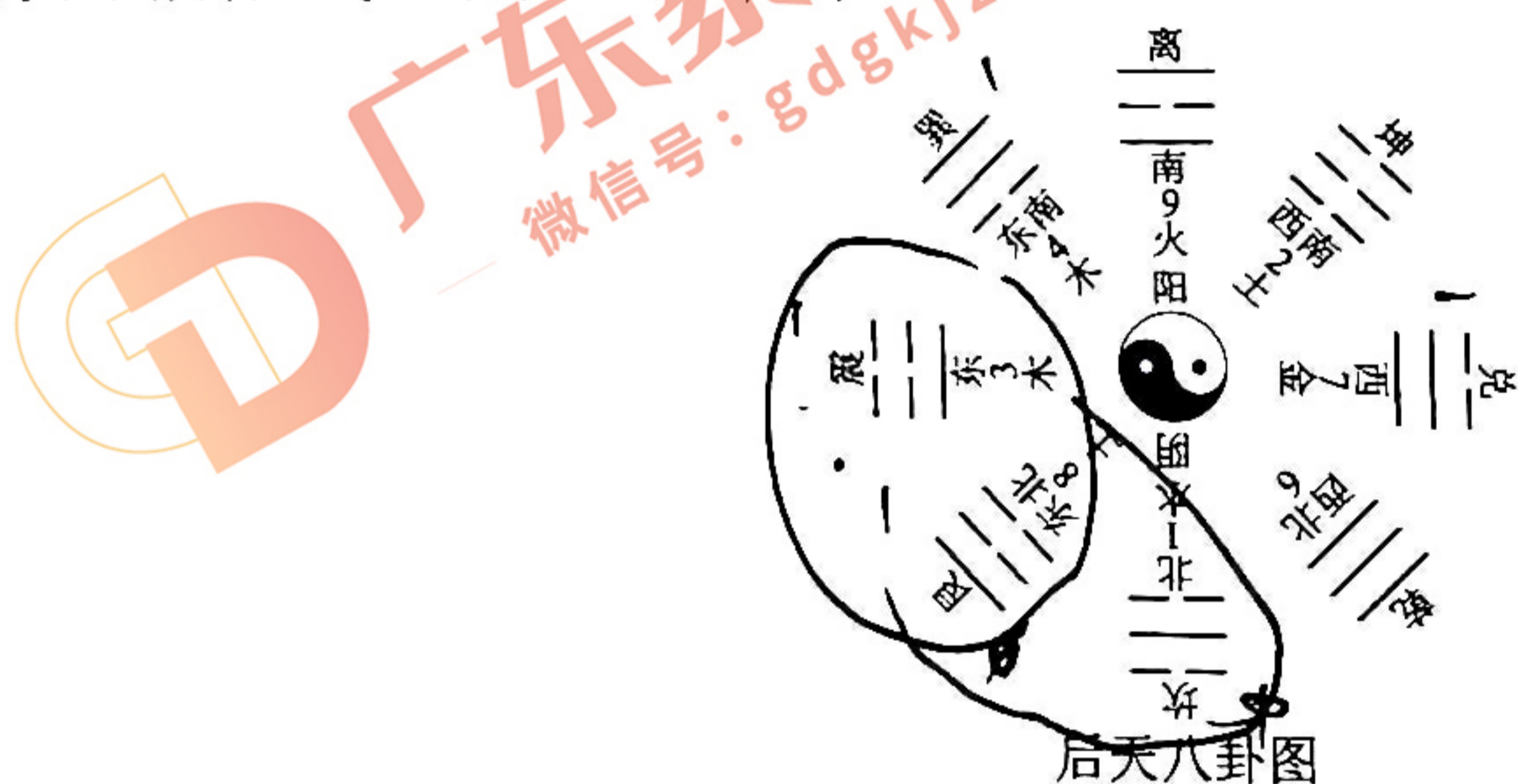
- A. $\frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4} < A < \frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{4} < A < \frac{\pi}{2}$

6. 如图, 某车间生产一种圆台形零件, 其下底面的直径为 4 cm, 上底面直径为 8 cm, 高为 4 cm, 已知点 P 是上底面圆周上不与直径 AB 端点重合的一点, 且 $AP=BP$, O 为上底面圆的圆心, 则 OP 与平面 ABC 所成的角的正切值为



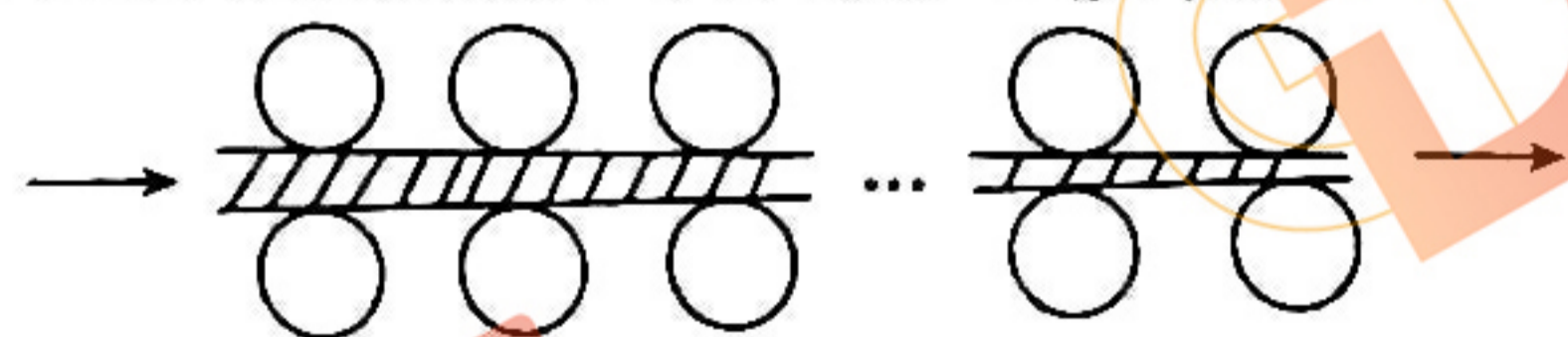
- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

7. 《易经》是中国传统文化中的精髓, 下图是易经后天八卦图(含乾、坤、巽、震、坎、离、艮、兑八卦), 每一卦由三根线组成(—表示一根阳线, - -表示一根阴线), 从八卦中任取两卦, 记事件 A = “两卦的六根线中恰有三根阳线”, B = “至少有一卦恰有两根阳线”, 则 $P(A|B) =$



- A. $\frac{3}{28}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{5}$

8. 定义: 一对轧辊的减薄率 = $\frac{\text{输入该对的面带厚度} - \text{输出该对的面带厚度}}{\text{输入该对的面带厚度}}$. 如图所示, 为一台擀面机的示意图, 擀面机由若干对轧辊组成, 面带从一端输入, 经过各对轧辊逐步减薄后输出. 已知擀面机每对轧辊的减薄率都为 0.2 (轧面的过程中, 面带宽度不变, 且不考虑损耗). 有一台擀面机共有 10 对轧辊, 所有轧辊的横截面积均为 $\frac{640\,000}{\pi}$ mm², 若第 k 对轧辊有缺陷, 每滚动一周在面带上压出一个疵点, 在擀面机输出的面带上, 疵点的间距为 L_k , 则



- A. $L_k = 1\,600 \times 0.2^{10-k}$ mm B. $L_k = 1\,600 \times 0.2^{k-10}$ mm
C. $L_k = 1\,600 \times 0.8^{10-k}$ mm D. $L_k = 1\,600 \times 0.8^{k-10}$ mm

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知平面 α 的一个法向量为 $n_1 = (1, -2, -\frac{1}{2})$, 平面 β 的一个法向量为 $n_2 = (-1, 0, -2)$, 直线 l 的方向向量为 $a = (1, 0, 2)$, 直线 m 的方向向量为 $b = (0, 1, -2)$, 则

- A. $l \parallel \alpha$ B. $\alpha \perp \beta$
C. l 与 m 为相交直线或异面直线 D. a 在 b 向量上的投影向量为 $(0, \frac{4}{5}, \frac{8}{5})$

10. 若点 $P(2,3)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条斜率为正的渐近线的右侧, c 为半焦距, 则

- A. $\frac{a+b}{c} > 1$ B. $\frac{b+c}{a} > 2$ C. $\frac{b}{a} > \frac{3}{2}$ D. $\frac{c}{b} > \frac{\sqrt{13}}{2}$

11. 若 $f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$, 则

- A. $f(x)$ 可以被 $(x-1)^5$ 整除 B. $f(x+y+1)$ 可以被 $(x+y)^4$ 整除
C. $f(30)$ 被 27 除的余数为 6 D. $f(29)$ 的个位数为 6

12. 若存在直线与曲线 $f(x) = x^3 - x, g(x) = x^2 - a^2 + a$ 都相切, 则 a 的值可以是

- A. 0 B. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\log_2 \sqrt{7}$ D. $\frac{\sqrt{e}}{\pi} + \frac{\pi}{\sqrt{e}}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 设 A, B, C, D 是四个命题, A 是 B 的必要不充分条件, A 是 C 的充分不必要条件, D 是 B 的充分必要条件, 那么 D 是 C 的 _____ 条件. (充分不必要、必要不充分、充要、既不充分又不必要四选一)

14. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_2 = 14, S_5 = 55$, 数列 $\{a_{3n-1}\}$ 的前 10 项的和为 _____.

15. 设 $\triangle ABC$ 内接于椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, A 与椭圆的上顶点重合, 边 BC 过 E 的中心 O , 若 AC 边上中线 BD 过点 $F(0, c)$, 其中 c 为椭圆 E 的半焦距, 则该椭圆的离心率为 _____.

16. 设函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 在 $\left[\alpha, \alpha + \frac{\pi}{3}\right]$ 上的值域为 $[M, N]$, 则 $N - M$ 的取值范围是 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, S_4 = \frac{15}{8}$, 且 $a_1, 3a_3, a_2$ 成等差数列.

(1) 证明: 数列 $\{S_n - 2\}$ 是等比数列;

(2) 若 $b_n = a_n (\log_2 a_n - 1)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

西藏隆子县玉麦乡位于喜马拉雅山脉南麓, 地处边疆, 山陡路险, 交通闭塞. 党的十八大以来, 该地区政府部门大力开发旅游等产业, 建设幸福家园, 实现农旅融合, 以创建国家全域旅游示范区为牵引, 构建“农业+文创+旅游”发展模式, 真正把农村建设成为“望得见山、看得见水、记得住乡愁”的美丽乡村, 在新政策的影响下, 游客越来越多. 当地旅游局统计了玉麦乡景区 2023 年 1 月份到 5 月份的接待游客人数 y (单位: 万人), 统计结果如下:

| 月份 x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 接待游客人数 y (单位: 万人) | 1.2 | 1.8 | 2.5 | 3.2 | 3.8 |

(1) 求相关系数 r 的值, 当 $r > 0.75$ 时, 线性关系为较强, 请说明 2023 年 1—5 月份 x 与接待游客人数 y 之间线性关系的强弱; 若线性相关, 求出 y 关于 x 的线性回归方程;

(2) 为打造群众满意的旅游区, 该地旅游部门对所推出的报团游和自助游项目进行了深入调查, 下表是从接待游客中随机抽取的 30 位游客的满意度调查表, 请将下述 2×2 列联表补充完整, 并依据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 分析游客对本地景区的满意度是否与报团游或自助游有关联.

| | 跟团游 | 自助游 | 合计 |
|-----|-----|-----|----|
| 满意 | | 3 | 18 |
| 不满意 | | | |
| 合计 | | 17 | 30 |

附:线性回归方程 $\hat{y} = bx + a$ 的斜率及截距的最小二乘法估计分别为 $\hat{b} =$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}, \text{相关系数 } r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}},$$

$$\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{参考数据: } \sqrt{43.6} \approx 6.603.$$

附表:

| | | | | |
|-------------------|-------|-------|-------|--------|
| α | 0.10 | 0.05 | 0.010 | 0.001 |
| χ^2_{α} | 2.706 | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

19. (本小题满分 12 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 分别以 a, b, c 为边长的正三角形的面积依次为 S_1, S_2, S_3 , 已知 $S_1 - S_2 + S_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}, \cos B = \frac{5}{13}$.

(1) 计算 $\triangle ABC$ 的面积;

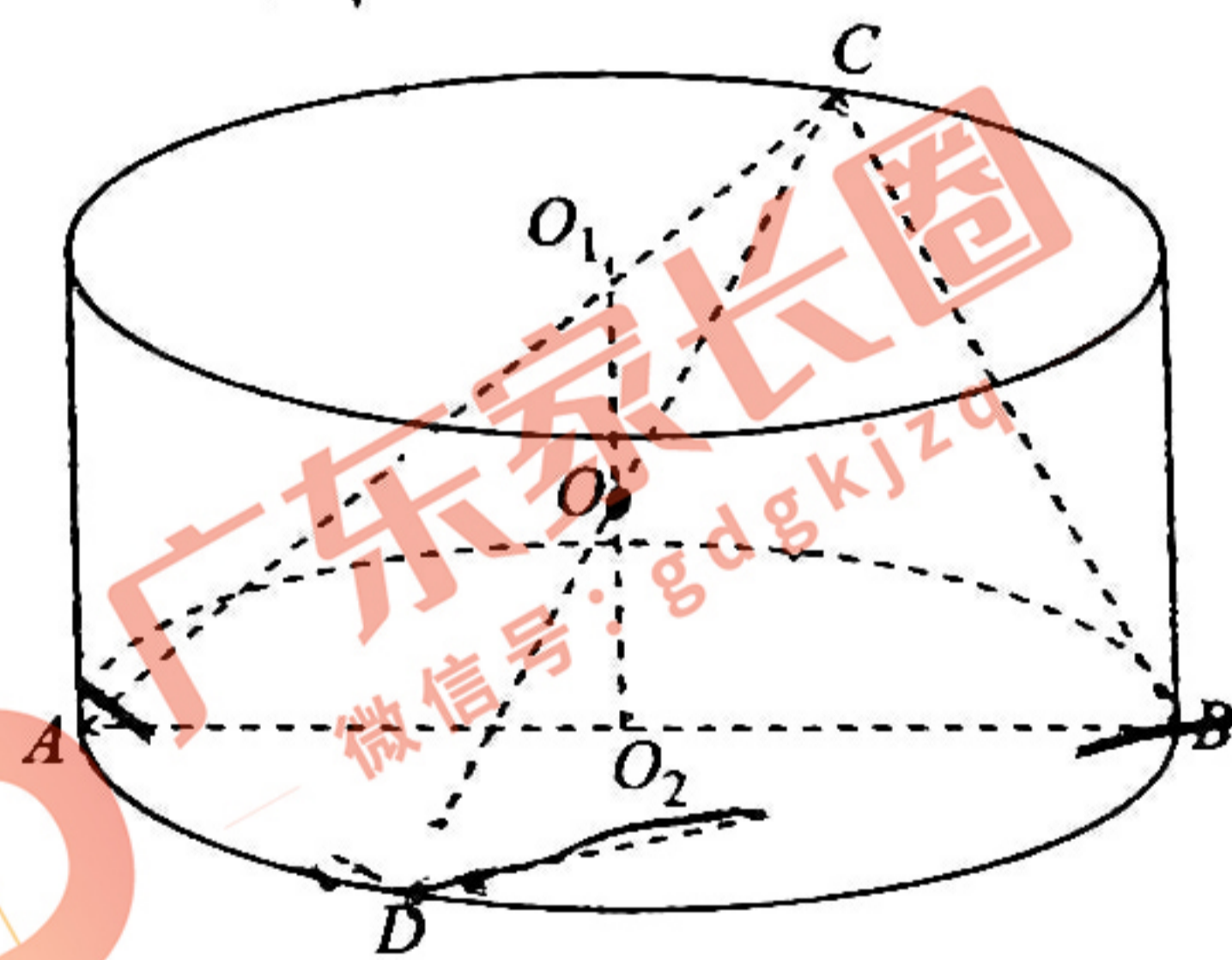
(2) 若 $\cos A = \frac{3}{5}$, 求 $(a+b+c)^2$.

20. (本小题满分 12 分)

如图, AB 为圆柱 O_1O_2 的下底面 $\odot O_2$ 的直径, C, D 分别为 $\odot O_1, \odot O_2$ 上的点, 线段 CD 与线段 O_1O_2 交于 O 点.

(1) 证明: O 为线段 O_1O_2 的中点;

(2) 若圆柱 O_1O_2 的体积和侧面积都为 8π , 且 AC 与下底面所成的角为 $\frac{\pi}{6}$, 求平面 ACD 与平面 BCD 所成锐角的余弦值.



21. (本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系中 xOy 中, 动点 E 到定点 $F(1, 0)$ 的距离比它到 y 轴的距离大 1, E 的轨迹为 C .

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 已知点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 分别为曲线 C 上的第一象限和第四象限的点, 且 $x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{9}{4}$, 求 $\triangle ABO$ 与 $\triangle AFO$ 面积之和的最小值.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = -a \ln x + \frac{x^2 + 1 - a}{x}, a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a=2$ 时, 证明: $f(x) \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立;

(2) 判断函数 $f(x)$ 的零点个数.