

绝密 ★ 启用前

2021 年普通高等学校招生全国统一考试模拟试题  
数学(二)

本试卷共 4 页,22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、考号等填写在试题卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答:用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 复数  $\frac{5(1-i)^2}{2-i}$  的虚部为  
A. -4 B. 2 C. 4 D. -4i
2. 已知向量  $a, b$  满足  $a^2 = 2a \cdot b = 16$ , 则向量  $b$  在  $a$  方向上的投影为  
A.  $\pm 2$  B.  $\frac{1}{2}$  C. 2 D. 4
3. 已知一个半径为 3 的扇形的圆心角为  $\theta (0 < \theta < 2\pi)$ , 面积为  $\frac{9\pi}{8}$ , 若  $\tan(\theta + \varphi) = 3$ , 则  $\tan \varphi =$   
A.  $-\frac{1}{2}$  B.  $\frac{1}{2}$  C.  $\frac{3}{4}$  D.  $-\frac{3}{4}$
4. 军舰鸟是一种大型海鸟,它是世界上飞得最快的鸟(如图所示),其速度甚至超过了世界上最快的摩托车。现有一只军舰鸟体长 0.8 m, 翅展达 2 m, 它在一次匀速飞行中,20 秒所飞行的路程超过其翅展的 1 040 倍,但少于它体长的 2 645 倍,则这只军舰鸟的速度可能为  
A. 300 千米/时 B. 360 千米/时 C. 378 千米/时 D. 400 千米/时
5. 古希腊数学家欧几里德在其著作《几何原本》中定义了相似圆锥,两个圆锥的高与底面的直径之比相等时,则称这两个圆锥为相似圆锥。已知圆锥  $SO$  的底面圆  $O$  的半径为 3, 其母线长为 5, 若圆锥  $SO'$  与圆锥  $SO$  是相似圆锥,且其高为 8, 则圆锥  $SO'$  的侧面积为  
A.  $15\pi$  B.  $60\pi$  C.  $96\pi$  D.  $120\pi$
6. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$  的左焦点为  $F$ , 点  $M$  在椭圆  $C$  上, 点  $N$  在圆  $E: (x-2)^2 + y^2 = 1$  上, 则  $|MF| + |MN|$  的最小值为  
A. 4 B. 5 C. 7 D. 8
7. 若定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 且  $f(2) = 0$ , 则不等式  $xf(x-1) \leq 0$  的解集为  
A.  $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$  B.  $(-\infty, -1] \cup [1, 3]$   
C.  $[-1, 0] \cup [1, 3]$  D.  $[-1, 0] \cup [3, +\infty)$

衡水金卷·先享题·压轴卷

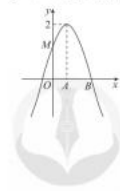
数学试题(二)第 1 页(共 4 页)

新高考

8. 在三棱锥  $A-BCD$  中,  $BD=BC=CD=5$ ,  $AC=AD=12$ ,  $AB=13$ , 则三棱锥  $A-BCD$  的外接球的球心  $O$  到平面  $BCD$  的距离为  
A.  $\frac{\sqrt{1121}}{6}$  B.  $\frac{\sqrt{1121}}{3}$  C. 7 D. 8

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 已知集合  $A = \{x | y = \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 3x - 2}}\}$ , 若  $A \cup B = \mathbf{R}$ , 则集合  $B$  可以为  
A.  $(-\frac{1}{2}, 2)$  B.  $(-1, 1)$  C.  $[-\frac{1}{2}, 3)$  D.  $(-1, +\infty)$
10. 已知数列  $\{a_n\}$  为等比数列, 则下列结论正确的是  
A.  $a_1 a_5 = a_2 a_4$   
B. 若  $a_2 = 4, a_5 = 16$ , 则  $a_1 = \pm 8$   
C. 若  $a_1 > 0$ , 则  $a_5 + a_1 \geq 2a_3$   
D. 数列  $\{a_{n+1} - a_n\}$  也是等比数列
11. 已知函数  $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \pi)$  的部分图象如图所示, 且点  $M(0, \sqrt{3})$ ,  $|AB| = \frac{\pi}{4}$ ,  $x_1, x_2 \in [\pi, \frac{4\pi}{3}]$ , 且  $f(x_1) = f(x_2)$ , 则下列说法正确的是  
A.  $\omega = 2$   
B.  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$   
C.  $\cos(x_1 + x_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$   
D. 函数  $g(x) = -2\cos 2x$  的图象可看作是将  $f(x)$  的图象向右平移  $\frac{5\pi}{12}$  个长度单位而得到的



12. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{4} & (x < 0) \\ mx^2 - \ln x & (x > 0) \end{cases}$ , 若关于  $x$  的不等式  $f(x) \leq x$  恰有 2 个整数解, 则  $m$  的值不可能为  
A. 0 B.  $\frac{\ln 2 + 2}{4}$  C.  $\frac{\ln 2 + 3}{4}$  D. 1

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 2021 年初,某地发现多起新冠肺炎病例,某医院决定派出一支医疗队前往此地支援抗疫工作。该医院职工踊跃报名,其中报名的医生 24 人,护士 48 人,医疗技术 12 人。该医院决定采用分层抽样的方法,从中抽取  $n$  人,若医生和护士共抽取了 12 人,则  $n =$  \_\_\_\_\_。
14. 已知函数  $f(x)$  为偶函数,且在区间  $(-3, 0)$  上递减,在  $(3, +\infty)$  上递减,写出满足上述条件的一个函数  $f(x) =$  \_\_\_\_\_。
15. 已知  $(x+2)(2x-3)^4 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots + a_7(x-1)^7$ , 则  $a_1 + a_2 + \dots + a_7$  的值是 \_\_\_\_\_。在上述展开式右边的 8 项中,抽取不同的 3 项,且使得这 3 项中恰有 2 项相邻,则有 \_\_\_\_\_ 种不同的取法。(本题第一空 2 分,第二空 3 分)
16. 双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左焦点为  $F$ , 过原点  $O$  的直线  $l$  分别交  $C$  的左、右两支于  $A, B$  两点,点  $A, P$  都在  $C$  的左支上,且  $A, F, P$  三点共线,若  $|PF| = |BF|$ ,  $|OA| = |OF|$ , 则  $C$  的离心率为 \_\_\_\_\_。

衡水金卷·先享题·压轴卷

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

在① $\frac{\sqrt{3}a}{c} - \sin B = \sqrt{3} \cos B$ ；② $2b - a = 2c \cos A$ ；③ $\frac{c \sin A}{1 - \cos C} = \sqrt{3}a$  这三个条件中任选一个，

补充在下面问题中，并作答。

问题：在  $\triangle ABC$  中，内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ，且 \_\_\_\_\_。

(1) 求  $C$  的大小；

(2) 若  $A = \frac{\pi}{2}$ ,  $b = 2$ ，角  $A$  的平分线交  $BC$  于点  $D$ ，求线段  $AD$  的长。

注：如果选择多个条件分别解答，那么按第一种方案解答计分。

18. (本小题满分 12 分)

已知  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和， $S_2 = 12$ ,  $a_1 = 1$ ，且满足  $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$ 。

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项  $a_n$ ；

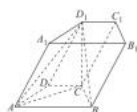
(2) 设  $b_n = |a_n|$ ，试求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ 。

19. (本小题满分 12 分)

如图，在四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中，底面  $ABCD$  满足  $AB \parallel CD$ ,  $AD = BC$ ，平面  $CDD_1C_1 \perp$  平面  $ABCD$ ，且  $\angle A_1AB = \angle BAD = 60^\circ$ ,  $AB = AA_1 = 2CD = 2$ 。

(1) 求证：平面  $ACD_1 \perp$  平面  $BCD_1$ ；

(2) 求二面角  $C - AD_1 - D$  的余弦值的大小。



20. (本小题满分 12 分)

已知在平面直角坐标系  $xOy$  中，直线  $l$  过点  $M(0, 4)$ ，且与抛物线  $C: x^2 = 4y$  交于  $A, B$  两点。

(1) 求证： $OA \perp OB$ ；

(2) 在  $y$  轴上是否存在定点  $N$ ，无论直线  $l$  的斜率为何值，向量  $\frac{\overrightarrow{AN}}{|\overrightarrow{AN}|} + \frac{\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{BN}|}$  与  $\overrightarrow{MN}$  始终共线？若存在，求出点  $N$  的坐标；若不存在，请说明理由。

衡水金卷·先享题·压轴卷

数学试题(二) 第 3 页(共 4 页)

新高考

21. (本小题满分 12 分)

某科技企业投资 2 亿元生产一种供 5G 智能手机使用的芯片，该芯片因生产原因其性能存在着一定的差异，该企业为掌握芯片的性能情况，从所生产的芯片中随机抽取了 200 片进行了性能测试，得到其性能指标的频数分布表如下所示(同一组数据用该组数据的区间中点值作代表)。

| 性能指标值/分 | [40, 50) | [50, 60) | [60, 70) | [70, 80) | [80, 90) | [90, 100] |
|---------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| 频数      | 20       | 30       | 40       | 60       | 30       | 20        |

利用样本估计总体的思想，解决下列问题：

(1) 估计该科技企业所生产的芯片性能指标值的平均数；

(2) 每块芯片的性能等级和净利润  $X$ (单位：元/片， $1 < m < 4$ ) 如下表所示：

| 性能指标值   | [40, 50) | [50, 70) | [70, 90) | [90, 100] |
|---------|----------|----------|----------|-----------|
| 等级      | 次品       | C 级      | B 级      | A 级       |
| 净利润 $X$ | $-10e^m$ | $30m$    | $50m$    | $70m$     |

(i) 从该科技企业所生产的芯片中随机抽取 3 片芯片，试求至少有 2 片芯片为 A 级或 B 级芯片的概率；

(ii) 若该科技企业该芯片的年产量为 200 万片，其中次品直接报废处理，其他芯片全部能被手机厂商收购，问：该企业两年之内是否有可能收回总投资？试说明理由。

参考数据： $\ln 10 \approx 2.30$ 。

22. (本小题满分 12 分)

已知  $f(x) = x^2 - x^2 + 2x + 2 + 2(x-1)\cos x$ 。

(1) 解不等式  $f(x) < 0$ ；

(2) 求证： $2\cos x > 1 - 2x^2 \ln x$ 。

衡水金卷·先享题·压轴卷

## 关于我们

**自主选拔在线**（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 “专业、专注、有态度” 的创办公理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。



微信搜一搜



自主选拔在线