

2022—2023 学年度上学期期中教学质量检测

## 高三数学试题

本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分。考试用时 150 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

### 第 I 卷(60 分)

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合  $A = \{x \mid \log_2 x \leq 0\}$ ,  $B = \{x \mid 1 < 3^x \leq 27\}$ , 则  $(C_{\mathbb{R}}A) \cap B =$   
 A.  $(0, 1)$                       B.  $(1, 3]$                       C.  $(1, 3)$                       D.  $[-1, 3)$
2. 已知复数  $z$  满足  $z(1-i) = (1-3i)^2$ , 则  $|z| =$   
 A.  $5\sqrt{2}$                       B.  $\sqrt{5}$                       C.  $\sqrt{2}$                       D. 8
3. 下列结论正确的是  
 A. 若命题  $p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 1 > 0$ , 则  $\neg p: \exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + x_0 + 1 < 0$ .  
 B. 若  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则“ $2^a > 2^b$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的必要不充分条件.  
 C. 点  $P(m, n)$  在  $\alpha$  的终边上, 则  $\cos \alpha > \sin \alpha$  的一个充要条件是  $m > n > 0$ .  
 D.  $\exists n \in \mathbf{N}, n^2 > 2^n$ .
4. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 0 \\ e^{-x} + m, & x \geq 0 \end{cases}$  ( $m \in \mathbf{R}$ ), 若函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上有两个零点, 则  $m$  的取值范围是  
 A.  $(-\infty, -1)$                       B.  $(0, 1]$                       C.  $(-1, 0)$                       D.  $[-1, 0)$
5. 已知  $\sin \theta + \cos(\theta - \frac{\pi}{6}) = 1$ , 则  $\sin(\theta + \frac{7\pi}{6}) =$   
 A.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$                       B.  $\frac{2}{3}$                       C.  $-\frac{2}{3}$                       D.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

高三数学试题第 1 页 (共 4 页)

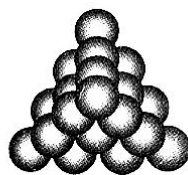
6. 如图,此形状出现在南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法·商功》中,后人称为“三角垛”。“三角垛”最上层有 1 个球,第二层有 3 个球,第三层有 6 个球,……。设第  $n$  层有  $a_n$  个球,从上往下  $n$  层球的总数为  $S_n$ ,则

A.  $S_1=19$

B.  $a_{n+1}-a_n=n$

C.  $a_{2022}=1011 \times 2023$

D.  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2022}} = \frac{2022}{2023}$



7. 若函数  $f(x)$  使得数列  $a_n=f(n), n \in \mathbf{N}^*$  为递增数列,则称函数  $f(x)$  为“数列保增函数”。已知函数  $f(x)=e^x-ax$  为“数列保增函数”,则  $a$  的取值范围为

A.  $a \in (-\infty, 0]$

B.  $a \in (-\infty, e^2-e)$

C.  $a \in (-\infty, e)$

D.  $a \in (-\infty, \sqrt{e}]$

8. 已知  $a=1.1^{1.1}, b=e^{0.1}, c=1+1.1 \ln 1.1$ , 下列说法正确的是

A.  $a > b > c$

B.  $b > c > a$

C.  $b > a > c$

D.  $a > c > b$

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 已知平面向量  $\vec{a}=(m, 1), \vec{b}=(2, n), \vec{c}=(1, -2)$ , 则

A. 若  $\vec{a} // \vec{c}$ , 则  $m = -\frac{1}{2}$ ;

B. 若  $\vec{b} \perp \vec{c}$ , 则  $n = 1$ ;

C. 若  $\vec{b}$  与  $\vec{c}$  的夹角为锐角, 则  $n < 1$ ;

D.  $|2\vec{a}-\vec{c}|$  的最小值为 4.

10. 下列结论正确的是

A. 若  $a > 0, b > 0$  且  $a+b=1$ , 则  $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$ ;

B. 若  $a > 0, b > 0, \lg a + \lg b = \lg(a+b)$ , 则  $a+b$  的最小值为 4;

C. 函数  $y = \sin x + \frac{4}{\sin x} (0 < x < \pi)$  的最小值为 4;

D. 已知各项均为正数的数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1}-a_n=2n, a_1=13$ , 则  $\frac{a_n}{n}$  取最小值时,  $n=3$ .

11. 已知函数  $f(x)=A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$  的部分图像如图所示, 将该函数图

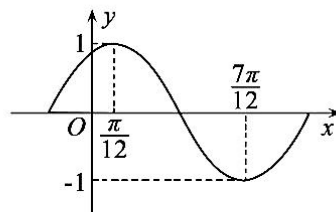
象向右平移  $\frac{\pi}{12}$  个单位后, 再把所得曲线上点的横坐标变为原来的 2 倍(纵坐标不变), 得到函数  $g(x)$  的图象, 则下列选项中正确的有

A.  $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$

B.  $g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3})$

C.  $x = \frac{4\pi}{3}$  是曲线  $y = g(x)$  的对称轴

D. 直线  $y = x + \frac{\sqrt{3}}{2}$  是曲线  $y = f(x)$  的一条切线



12. 在平面四边形  $ABCD$  中,  $\triangle ABD$  的面积是  $\triangle BCD$  面积的 2 倍, 又数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1=2$ , 恒有  $\overrightarrow{BD}=(a_n-2^{n-1})\overrightarrow{BA}+(a_{n+1}+2^n)\overrightarrow{BC}$ , 设  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 则
- A.  $\{a_n\}$  为等比数列  
B.  $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$  为等差数列  
C.  $\{a_n\}$  为递增数列  
D.  $S_n=(3-n)2^{n+1}-6$

## 第 II 卷(90 分)

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知  $a>b>1$ , 若  $\log_a b + \log_b a = \frac{10}{3}$ ,  $a^b = b^a$ , 则  $a+b =$  \_\_\_\_\_.
14. 在四边形  $ABCD$  中,  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ , 且  $|\overrightarrow{AB}| = 2|\overrightarrow{AD}| = 2$ ,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1$ , 则  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$  的值为 \_\_\_\_\_.
15. 设  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 且  $a_1=3$ ,  $S_n = a_{n+1}$ ,  $n \in \mathbf{N}^+$ , 则  $a_n =$  \_\_\_\_\_.
16. 已知函数  $f(x) = (x-1)e^x \ln a - a^x$  在  $x \in (0, +\infty)$  上单调递减, 则  $a$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知函数  $f(x) = \log_a(2-ax)$ .
- (1) 当  $x \in [-0, 1]$  时, 函数  $f(x)$  恒有意义, 求实数  $a$  的取值范围;
- (2) 是否存在这样的实数  $a$ , 使得函数  $f(x)$  在区间  $[-1, 2]$  上为增函数, 并且最大值为 1? 如果存在, 试求出  $a$  的值; 如果不存在, 请说明理由.
18. (12 分) 已知正项数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1=2$  且  $a_{n+1}^2 - 6a_n^2 + a_n a_{n+1} = 0$ .
- (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;
- (2) 令  $b_n = \begin{cases} \log_2 a_n^2, & n \text{ 为奇数} \\ a_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $2n+1$  项的和  $S_{2n+1}$ .
19. (12 分) 已知函数  $f(x) = (a + 2\cos^2 x)\cos(2x + \theta)$  为奇函数, 且  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ , 其中  $a \in \mathbf{R}$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ . 函数  $g(x) = 4f\left(x + \frac{\pi}{12}\right) \cdot f(x)$ .
- (1) 求  $a, \theta$  的值
- (2) 求函数  $g(x)$  的单调递减区间;

20. (12分) 已知 $\triangle ABC$ 中, $A$ 、 $B$ 、 $C$ 所对边分别为 $a$ 、 $b$ 、 $c$ ,且 $b=2a$ , $c=3$ .

(1) 若 $C=\frac{2\pi}{3}$ ,求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 $2\sin B - \sin A = 1$ ,求 $\triangle ABC$ 的周长.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = x - (a+2)\ln x - \frac{a+1}{x}$ .

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $g(x) = e^x + mx^2 - e^2 - 3$ ,当 $a = e^2 - 1$ 时,对任意 $x_1 \in [1, +\infty)$ ,存在 $x_2 \in [1, +\infty)$ ,使 $g(x_2) \leq f(x_1)$ ,求实数 $m$ 的取值范围.

22. (12分) 已知函数 $f(x) = \ln x$ , $g(x) = \frac{a}{x}$ ,其中 $a > 0$ .

(1) 若 $h(x) = f(x) + g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同零点,求 $a$ 的取值范围.

(2) 若 $F(x) = \frac{1}{g(\sin(x-1))} - f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,求 $a$ 的取值范围.

(3) 证明:  $\sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{k+1} < \ln(n+1)$ ,  $n, k \in \mathbf{N}^*$ .



2022—2023 学年度上学期期中教学质量检测

高三数学试题参考答案

一、单选 1. B 2. A 3. D 4. D 5. A 6. C 7. B 8. C

二、多选 9. ABD 10. AB 11. ACD 12. BD

三、填空 13.  $4\sqrt{3}$  14. 5 15.  $a_n = \begin{cases} 3, n=1 \\ 3 \cdot 2^{n-2}, n \geq 2 \end{cases}$  16.  $[-e^{-1+\frac{1}{e}}, +\infty)$

四、解答

17. 解: (1) 因为  $a > 0$  且  $a \neq 1$ , 设  $t(x) = 2 - ax$ ,  
 则  $t(x) = 2 - ax$  为减函数,  $x \in [0, 1]$  时,  $t(x)$  的最小值为  $2 - a$ , ..... 2 分  
 当  $x \in [0, 1]$  时,  $f(x)$  恒有意义, 即  $x \in [0, 1]$  时,  $2 - ax > 0$  恒成立.  
 所以  $2 - a > 0$ . 所以  $a < 2$ . ..... 4 分  
 又  $a > 0$  且  $a \neq 1$ , 所以  $a \in (0, 1) \cup (1, 2)$ . ..... 5 分  
 (2)  $t(x) = 2 - ax$ , 因为  $a > 0$ , 所以函数  $t(x)$  为减函数.  
 因为  $f(x)$  在区间  $[1, 2]$  上为增函数, 所以  $y = \log_a t$  为减函数, 所以  $0 < a < 1$ . ..... 7 分  
 当  $x \in [1, 2]$  时,  $f(x)$  最大值为  $f(2) = \log_a(2 - 2a) = 1$  ..... 8 分  
 所以  $\begin{cases} 0 < a < 1 \\ \log_a(2 - 2a) = 1 \end{cases}$  即  $a = \frac{2}{3}$   
 故  $a = \frac{2}{3}$ , 使得函数  $f(x)$  在区间  $[1, 2]$  上为增函数, 并且最大值为 1. .... 10 分
18. (1) 由题意得:  $(a_{n+1} + 3a_n)(a_{n+1} - 2a_n) = 0$  ..... 2 分  
 $\because a_n > 0 \therefore a_{n+1} = 2a_n$  即:  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$  为常数 ..... 4 分  
 $\therefore$  数列  $\{a_n\}$  是以 2 为首项, 以 2 为公比的等比数列 ..... 5 分  
 $\therefore a_n = 2^n$  ..... 6 分
- (2)  $b_n = \begin{cases} 2n, n \text{ 为奇数} \\ 2^n, n \text{ 为偶数} \end{cases}$  ..... 8 分  
 $\therefore S_{2n+1} = b_1 + b_2 + \dots + b_{2n} + b_{2n+1}$   
 $= (b_1 + b_3 + \dots + b_{2n+1}) + (b_2 + b_4 + \dots + b_{2n})$   
 $= \frac{(n+1)(2+4n+2)}{2} + \frac{4(1-4^n)}{1-4}$   
 $= 2n^2 + 4n + \frac{2}{3} + \frac{4^{n+1}}{3}$  ..... 12 分
19. (1) 法一: 因为  $f(x) = (a + 2\cos^2 x)\cos(2x + \theta)$  是奇函数,  
 而  $y_1 = a + 2\cos^2 x$  为偶函数, 所以  $y_2 = \cos(2x + \theta)$  为奇函数, ..... 2 分  
 又  $\theta \in (0, \pi)$ , 得  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . ..... 3 分



所以  $f(x) = -\sin 2x \cdot (a + 2\cos^2 x)$  由  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ , 得  $-(a+1) = 0$ , 即  $a = -1$ . ..... 5分

法二: 由题意可得  $\begin{cases} f(0) = (a+2)\cos\theta = 0 \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = (a+1)(-\sin\theta) = 0 \end{cases}$  ..... 2分

因为  $\theta \in (0, \pi)$ , 所以  $\sin\theta > 0$ , 可解得  $a = -1, \theta = \frac{\pi}{2}$  ..... 4分

此时  $f(x) = -\frac{1}{2}\sin 4x$ , 为奇函数, 符合题意, 所以  $a = -1, \theta = \frac{\pi}{2}$  ..... 5分

$$\begin{aligned} (2) g(x) &= 4f\left(x + \frac{\pi}{12}\right) \cdot f(x) = \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin 4x = \left(\frac{1}{2}\sin 4x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 4x\right) \cdot \sin 4x \\ &= \frac{1}{2}\sin^2 4x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 4x \cdot \sin 4x = \frac{1}{4}(1 - \cos 8x) + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 8x \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 8x - \frac{1}{4}\cos 8x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sin\left(8x - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$
 ..... 8分

令  $z = 8x - \frac{\pi}{6}$ , 则  $y = \sin z$  的单调递减区间为  $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$

由  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 8x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$  解得  $\frac{\pi}{12} + \frac{1}{4}k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{24} + \frac{1}{4}k\pi, k \in \mathbf{Z}$  ..... 11分.

所以  $g(x)$  的单调递减区间为  $\left[-\frac{\pi}{12} + \frac{1}{4}k\pi, \frac{5\pi}{24} + \frac{1}{4}k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$  ..... 12分

20. 解: (1) 因为  $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C, b = 2a, c = 3$

$$\therefore 7a^2 = 9, \text{解得 } a = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$
 ..... 2分

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{9}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{14}$$
 ..... 4分

(2) 因为  $b = 2a$ , 由正弦定理可得  $\sin B = 2\sin A$ , 代入  $2\sin B - \sin A = 1$

$$\text{解得 } \sin A = \frac{1}{3}, \sin B = \frac{2}{3}, \text{因为 } a < b, \text{所以 } A \text{ 为锐角, } \therefore \cos A = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$
 ..... 6分

$$\text{当 } B \text{ 为锐角时, } \cos B = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\therefore \sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{1\sqrt{5}}{3 \cdot 3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{2} + \sqrt{5}}{9}$$
 ..... 8分

$$\text{因为 } \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$

$$\therefore a = \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{5}}{3}, b = \frac{8\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}{3}, \therefore C_{\triangle ABC} = 4\sqrt{2} - \sqrt{5} + 3$$
 ..... 9分

$$\text{当 } B \text{ 为钝角时, } \cos B = -\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

高三数学试题参考答案第 2 页 (共 4 页)

$$\therefore \sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{1}{3} \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}{9}$$

因为  $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$

$$\therefore a = \frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{3}, b = \frac{8\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{3}, \therefore C_{\triangle ABC} = 4\sqrt{2}+\sqrt{5}+3 \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

综上： $\triangle ABC$  的周长为  $4\sqrt{2}-\sqrt{5}+3$  或  $4\sqrt{2}+\sqrt{5}+3$ .  $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

21. 解：(1)  $f(x)$  定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x) = 1 - \frac{a+2}{x} + \frac{a+1}{x^2} = \frac{(x-1)^2 - x - (a+1)}{x^2}$ ,

令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = 1$  或  $x = a + 1$ .  $\dots\dots\dots 1 \text{分}$

当  $a + 1 \leq 0$  即  $a \leq -1$  时:

$x \in (0, 1)$ ,  $f'(x) < 0$ , 函数  $f(x)$  单调递减;

$x \in (1, +\infty)$ ,  $f'(x) > 0$ , 函数  $f(x)$  单调递增;  $\dots\dots\dots 2 \text{分}$

当  $0 < a + 1 < 1$  即  $-1 < a < 0$  时:

$x \in (0, a + 1)$ ,  $f'(x) > 0$ , 函数  $f(x)$  单调递增;

$x \in (a + 1, 1)$ ,  $f'(x) < 0$ , 函数  $f(x)$  单调递减;

$x \in (1, +\infty)$ ,  $f'(x) > 0$ , 函数  $f(x)$  单调递增;  $\dots\dots\dots 3 \text{分}$

当  $a + 1 = 1$  即  $a = 0$  时:

$x \in (0, +\infty)$ ,  $f'(x) \geq 0$ , 函数  $f(x)$  单调递增;  $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

当  $a + 1 > 1$  即  $a > 0$  时:

$x \in (0, 1)$ ,  $f'(x) > 0$ , 函数  $f(x)$  单调递增;

$x \in (1, a + 1)$ ,  $f'(x) < 0$ , 函数  $f(x)$  单调递减;

$x \in (a + 1, +\infty)$ ,  $f'(x) > 0$ , 函数  $f(x)$  单调递增;  $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

综上: 当  $a \leq -1$  时: 单调递减区间有  $(0, 1)$ ; 单调递增区间有  $(1, +\infty)$

当  $-1 < a < 0$  时: 单调递减区间有  $(a + 1, 1)$ ; 单调递增区间有  $(0, a + 1), (1, +\infty)$

当  $a = 0$  时: 单调递增区间有  $(0, +\infty)$ , 无单调递减区间

当  $a > 0$  时: 单调递减区间有  $(1, a + 1)$ ; 单调递增区间有  $(0, 1), (a + 1, +\infty)$   $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

(2) 当  $a = e^2 - 1$  时, 由(1)得函数  $f(x)$  在区间  $(1, e^2)$  上单调递减, 在区间  $(0, 1), (e^2, +\infty)$  上单调递增, 从而函数  $f(x)$  在区间  $[-1, +\infty)$  上的最小值为  $f(e^2) = -e^2 - 3$ .  $\dots\dots\dots 8 \text{分}$

即存在  $x_2 \in [-1, +\infty)$ , 使  $g(x_2) \leq -e^2 - 3$ ,

即存在  $x \in [-1, +\infty)$ , 使得  $e^x + mx^2 - e^2 - 3 \leq -e^2 - 3$

即  $m \leq -\frac{e^x}{x^2}$ , 令  $h(x) = -\frac{e^x}{x^2}, x \in [-1, +\infty)$ , 则  $m \leq h(x)_{\max}$ ,  $\dots\dots\dots 10 \text{分}$

由  $h'(x) = \frac{e^x(2-x)}{x^3}$ , 当  $x \in (1, 2)$  时  $f'(x) > 0$ , 函数  $f(x)$  单调递增; 当  $x \in (2, +\infty)$  时  $f'$

$(x) < 0$ , 函数  $f(x)$  单调递减, 所以  $h(x)_{\max} = h(2) = -\frac{e^2}{4}$ , 所以  $m \leq -\frac{e^2}{4}$   $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

22. 解: (1)  $h(x) = f(x) + g(x) = \ln x + \frac{a}{x}, h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} = \frac{x-a}{x^2}$

所以  $x \in (0, a)$  时,  $h(x) < 0, h(x)$  单调递减,  $x \in (a, +\infty)$  时,  $h(x) > 0, h(x)$  单调递增,

所以  $x = a$  时,  $h(x)$  取最小值  $h(a) = \ln a + 1$  ..... 2 分

又  $x \rightarrow 0, h(x) \rightarrow +\infty; x \rightarrow +\infty, h(x) \rightarrow +\infty$

因为  $h(x)$  在  $(0, +\infty)$  有两个不同的零点, 所以  $h(a) = \ln a + 1 < 0$  ..... 3 分

所以  $0 < a < \frac{1}{e}$ . ..... 4 分

(2)  $F(x) = \frac{1}{g(\sin(x-1))} - f(x) = \frac{\sin(x-1)}{a} - \ln x$  在区间  $(0, 1)$  上单调递减,

即  $F'(x) = \frac{\cos(x-1)}{a} - \frac{1}{x} \leq 0$  在  $(0, 1)$  上恒成立, ..... 5 分

即  $a \geq x \cos(x-1)$  在  $(0, 1)$  上恒成立. .... 6 分

令  $\varphi(x) = x \cos(x-1), \varphi'(x) = \cos(x-1) - x \sin(x-1)$ , 当  $x \in (0, 1)$  时,

$\cos(x-1) > 0, \sin(x-1) < 0$  所以  $\varphi(x) > 0$ , 即  $\varphi(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增

所以当  $x \in (0, 1)$  时  $\varphi(x) < \varphi(1) = 1$ , 所以  $a \geq 1$  ..... 8 分

(3) 证明: 由(2)知  $a = 1$  时,  $F(x) = \sin(x-1) - \ln x > F(1) = 0$

所以  $\sin(x-1) > \ln x$ , 即  $\sin(1-x) < \ln \frac{1}{x}, x \in (0, 1)$  ..... 10 分

令  $x = \frac{k}{k+1}$  得  $\sin(1 - \frac{k}{k+1}) = \sin \frac{1}{k+1} < \ln \frac{k+1}{k}$

所以  $\sin \frac{1}{2} + \sin \frac{1}{3} + \dots + \sin \frac{1}{n+1} < \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n+1}{n}$

$= \ln 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{n+1}{n} = \ln(n+1)$

即  $\sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{k+1} < \ln(n+1), n, k \in \mathbf{N}^*$ . ..... 12 分





## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

