重庆市高2023届高三第九次质量检测

数学试题参考答案与评分细则

一、单项选择题:本题共8小题.每小题5分,共40分.

1－4 BADD　　5－8 ACDB

5. A　解析:设圆的半径为r,则$OA=2-r$,$\therefore(2-r)^2=r^2+1\Rightarrow r=\frac{3}{4}$,$\therefore OA=\frac{5}{4}$且$\cos\angle AOB=-\frac{7}{25}$,

$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left(\frac{5}{4}\right)^2\left(-\frac{7}{25}\right)=-\frac{7}{16}$.

6. C　解析:$f(x)=\frac{3}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$,将函数$f(x)$图像向左平行移动$a$个单位后的函数记为$g(x)$,则$g(x)=\sqrt{3}\sin\left(x+a+\frac{\pi}{6}\right)$,而函数$g(x)$的图像关于$y$轴对称有$g(0)=\pm\sqrt{3}$,

$\therefore\sin\left(a+\frac{\pi}{6}\right)=\pm1$,$\therefore a+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,$\therefore a=\frac{\pi}{3}+k\pi$,$\because a>0$,$\therefore$实数$a$的最小值为$\frac{\pi}{3}$.

7. D　解析:由第6项的二项式系数最大知n的可能取值为9,10,11,又由题得:$(m-1)^n=2^n$,当$n=9,11$时,$m=3$;当$n=10$时,$m=3$或-1,故有序实数对(m,n)共有4组不同的解.

8. B　解析:设$A(a\cos\alpha,b\sin\alpha)$,$B(a\cos\beta,b\sin\beta)$,则$C(a\cos\alpha+a\cos\beta,b\sin\alpha+b\sin\beta)$,将$C$坐标代入椭圆方程有$(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2=1\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$,又四边形$OACB$的面积为$S=2S_{\triangle AOB}=|a\cos\alpha\cdot b\sin\beta-a\cos\beta\cdot b\sin\alpha|=ab|\sin(\alpha-\beta)|$,即$\frac{\sqrt{3}}{2}ab=\frac{3\sqrt{6}}{2}$,又根据$AB$和$OC$的斜率乘积为$-\frac{1}{2}$知$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$,所以$a^2=6$,$b^2=3$.

二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.全部选对得5分,部分选对得2分,有选错得0分.

9. BC　　10. BD　　11. ABC　　12. AD

11. ABC　解析:$P_A=\left(\frac{2}{3}\right)^4+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{64}{243}$,$P_C=\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{7}{81}$.

$\therefore P_B=1-P_A-P_C=1-\frac{85}{243}=\frac{158}{243}$,$P_4=\left(\frac{2}{3}\right)^4+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{2}{9}$,$P_5=1-P_3-P_4=\frac{20}{27}$.

12. AD　解析:对A:定义域对称,且$f(x)=-f(-x)$,显然成立;

对B:设直线$y=kx$,联立方程:$ax+\frac{b}{x}=kx\Rightarrow(k-a)x^2-b=0$,显然不成立

对C:若$f(x_1)=f(x_2)$,$x_1\neq x_2$,则$ax_1+\frac{b}{x_1}=ax_2+\frac{b}{x_2}\Rightarrow x_1x_2=\frac{b}{a}$,

即$\sin x(\sin x+2)=\frac{b}{a}$,由$\sin x$的有界性,显然$\sin x(\sin x+2)=\frac{b}{a}$不一定有解

对D:$f(x)=k\pi+\frac{\pi}{4}$,$k\in z$,显然存在$\exists a,b$,使方程有解.

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. $\sqrt{2}+1$　　14. 1012　　15. $\left[1,\frac{3}{2}\right]$　　16. $\left(0,\frac{1}{3}\right)$

15. $\left[1,\frac{3}{2}\right]$

解析:令 $\sin x=t,t\in[-1,1]$,则 $f(x)$ 的值域转化为 $g(t)=1-2t^2+|2t|$ 的值域,

由于 $g(t)=\begin{cases}-2t^2+2t+1(0\leqslant t\leqslant 1)\\-2t^2-2t+1(-1\leqslant t<0)\end{cases}$ 得 $g(t)$ 的值域为 $\left[1,\frac{3}{2}\right]$

16. $\left(0,\frac{1}{3}\right)$

解析:函数 $f(x)=ax^3-\frac{1}{3}$ 与函数 $g(x)=x^2-\frac{2}{3}cx$ 的图像三个不同交点的横坐标等价于考查函数 $h(x)=f(x)-g(x)=ax^3-x^2+\frac{2}{3}cx-\frac{1}{3}$ 有三个不同的零点,则 $h'(x)=3ax^2-2x+\frac{2}{3}c$,故必有方程 $3ax^2-2x+\frac{2}{3}c=0$ 有两个不同的实数根,则 $a>0,\Delta=4-8ac>0,\therefore ac<\frac{1}{2}$

另一方面,由三个不同交点的横坐标构成等差数列可知:令 $h''(x)=6ax-2=0$ 得 $x=\frac{1}{3a}$,则由三次函数的对称性知当且仅当 $h\left(\frac{1}{3a}\right)=0$ 时符合题意,化简整理即有 $6ac=2+9a^2$,故 $2+9a^2<3$,

$\therefore a^2<\frac{1}{9}$ 且 $a>0$

所以实数 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{3}\right)$.

四、解答题:本题共6小题,共70分.

17. 解:(1)由 $b\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)+a\cos\left(\frac{\pi}{2}+B\right)=0$,结合正弦定理可得:

$\sin B\left(\frac{1}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)-\sin A\sin B=0\Rightarrow\sin B=0$(舍)或 $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A=\frac{1}{2}\sin A$,

所以 $\tan A=\sqrt{3}\Rightarrow A=\frac{\pi}{3}$. …………………………………………………………………… 5分

(2)由 $\angle ADB=2\angle ACB$ 知 $AD=CD$ 且 $C\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$, ………………………………………………… 6分

所以 $\triangle ABD$ 中,有 $B=\frac{2\pi}{3}-C,\angle BAD=\frac{\pi}{3}-C$,

由正弦定理可得:$\frac{BD}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-C\right)}=\frac{CD}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)}=\frac{BC}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-C\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)}$ ………………………… 8分

所以 $\frac{CD}{CB}=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-C\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C}{\sqrt{3}\cos C}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\tan C\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ …………… 10分

18. 解：(1)由图，两个变量线性相关.

由已知条件可得：$t=3, w=15$，所以$\sum\limits_{i=1}^{5}(t_i-t)(w_i-w)=16+3+0+4+18=41$，………………… 2 分

$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(w_i-w)^2}=\sqrt{64+9+4+16+81}=\sqrt{174}$，$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(t_i-t)^2}=\sqrt{4+1+0+1+4}=\sqrt{10}$，

所以相关系数$r=\dfrac{41}{\sqrt{1740}}\approx\dfrac{41}{41.7}\approx 0.98$，因此，两个变量具有很强的线性相关性. ………………… 6 分

(2)结合(1)可知，$\hat{b}=\dfrac{41}{10}=4.1$，$\hat{a}=\bar{w}-\hat{b}\cdot\bar{t}=15-4.1\times3=2.7$，………………………………… 9 分

所以回归方程是：$\hat{w}=4.1t+2.7$，……………………………………………………………… 10 分

当$t=7$时，有$\hat{w}=4.1\times7+2.7=31.4$，即预测2024年移动物联网连接数为31.4亿户. …… 12 分

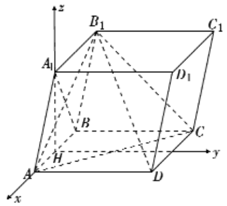
19. 证明：(1)连接B_1A，作$A_1H\perp AB$于H.

因为ABB_1A_1是菱形，所以$B_1A\perp A_1B$，

又因为$A_1B\perp B_1D$，所以$A_1B\perp$面DAB_1，所以$A_1B\perp AD$，

又平面$ABCD\perp$平面ABB_1A_1，平面$ABCD\cap$平面$ABB_1A_1=AB$，所以$A_1H\perp$面$ABCD\Rightarrow A_1H\perp AD$

所以$AD\perp$面$ABB_1A_1\Rightarrow AD\perp AB$，而$ABCD$为菱形，所以四边形$ABCD$是正方形. ………………… 5 分



(2)解：$\angle A_1AB=60°$时，H为AB的中点，如图建立空间直角坐标系

则，$A(1,0,0)$，$B_1(-2,0,\sqrt{3})$，$C(-1,2,0)$，$B(-1,0,0)$，

$\overrightarrow{CA}=(2,-2,0)$，$\overrightarrow{CB_1}=(-1,-2,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CB}=(0,-2,0)$

设平面AB_1C的一个法向量$\vec{m}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CA}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CB_1}=0\end{cases}$，令$x=1$，

解得$\vec{m}=(1,1,\sqrt{3})$，………………………………………………………… 7 分

设平面BB_1C的一个法向量$\vec{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}=0\end{cases}$，令$z=1$，解得

$\vec{n}=(\sqrt{3},0,1)$，……………………………………………………………………………… 9 分

则$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times2}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，……………………………………………… 11 分

又因为$A-B_1C-B$为锐二面角，所以$A-B_1C-B$的余弦值为$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. ………………………… 12 分

20. 解：(1)设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$n\geqslant2$，$3a_n=2(S_n+2n)$，$3a_{n-1}=2(S_{n-1}+2n-2)$.

相减得：$a_n=3a_{n-1}+4$，所以$a_n+2=3(a_{n-1}+2)$，又$a_1=4$，……………………………… 2 分

所以$\{a_n+2\}$是以首项为6，公比为3的等比数列，即$a_n+2=6\cdot3^{n-1}$，所以$a_n=6\cdot3^{n-1}-2$ ……… 5 分

(2)$b_n=n$，即证：$(1+1)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)>\sqrt{2n+1}$ ………………………… 7 分

方法一：令$f(n)=\dfrac{\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\left(1+\frac{1}{b_3}\right)\left(1+\frac{1}{b_5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{b_{2n-1}}\right)}{\sqrt{2n+1}}$. 则$\dfrac{f(n+1)}{f(n)}=\dfrac{2n+2}{\sqrt{2n+1}\cdot\sqrt{2n+3}}$，…… 9 分

因为$(2n+2)^2>(2n+1)(2n+3)$，所以$f(n+1)>f(n)$ ……………………………… 11 分

所以$f(n)$单调递增，即$f(n)>f(1)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}>1$，即：$\left(1+\dfrac{1}{b_1}\right)\left(1+\dfrac{1}{b_3}\right)\left(1+\dfrac{1}{b_5}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{b_{2n-1}}\right)>\sqrt{b_{2n+1}}$.

…………………………………………………………………………………………… 12 分

方法二:放缩法:$\frac{2n}{2n-1}>\frac{2n+1}{2n}\Rightarrow(\frac{2n}{2n-1})^2>\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n+1}{2n}=\frac{2n+1}{2n-1}$ ………………………… 8 分

所以:$\left(\frac{2}{1}\right)^2>\frac{3}{1},\left(\frac{4}{3}\right)^2>\frac{5}{3},\cdots,\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^2>\frac{2n+1}{2n-1}$ ………………………… 10 分

相乘得:$\left(\frac{2}{1}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot\cdots\cdot\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^2>\frac{3}{1}\cdot\frac{5}{3}\cdot\cdots\frac{2n+1}{2n-1}=2n+1$

即:$\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\left(1+\frac{1}{b_3}\right)\left(1+\frac{1}{b_5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{b_{2n-1}}\right)>\sqrt{b_{2n+1}}$. ………………………… 12 分

方法三:数学归纳法:步骤略

21. 解:(1)曲线 C 的方程为:$x^2=4y$ ………………………… 4 分

(2)设 A,B 坐标分别为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),D(x_3,y_3),E(x_4,y_4)$,

因为$\frac{S_{\triangle DOE}}{S_{\triangle AOB}}=\frac{|OD|\cdot|OE|}{|OA|\cdot|OB|}=\frac{|x_3x_4|}{|x_1x_2|}$ ………………………… 6 分

令直线 $l_{OA}:y=k_1x,k_1=\frac{y_1}{x_1},l_{OB}:y=k_2x,k_2=\frac{y_2}{x_2}$,与圆 $x^2+y^2-2y=0$ 联立得:$x_3=\frac{2k_1}{1+k_1^2}$,

同理:$x_4=\frac{2k_2}{1+k_2^2}$,所以$\frac{|x_3x_4|}{|x_1x_2|}=\left|\frac{4k_1k_2}{x_1x_2(1+k_1^2)(1+k_2^2)}\right|$ ………………………… 8 分

令 $l_{AB}:y=kx+1$,与 $x^2=4y$ 联立得:$x^2-4kx-4=0$,所以:$x_1x_2=-4,y_1y_2=1$

所以 $k_1k_2=-\frac{1}{4}$,代入得:$\frac{|x_3x_4|}{|x_1x_2|}=\left|\frac{1}{\frac{17}{4}+4(k_1^2+k_2^2)}\right|$, ………………………… 10 分

又因为 $k_1^2+k_2^2\geqslant2|k_1k_2|$,所以$\frac{|x_3x_4|}{|x_1x_2|}=\left|\frac{1}{\frac{17}{4}+4(k_1^2+k_2^2)}\right|\leqslant\frac{4}{25}$,当且仅当 $k_1=\frac{1}{2},k_2=-\frac{1}{2}$ 时取等

所以△DOE 与△AOB 面积之比的最大值 $\frac{4}{25}$. ………………………… 12 分

22. 解:(1)$(x-1)e^x-a\ln x=0$ 在定义域内有 $x_0\neq1$ 的零点,所以 $a=\frac{(x-1)e^x}{\ln x}$

令 $g(x)=\frac{(x-1)e^x}{\ln x}\Rightarrow g'(x)=\frac{xe^x\left(\ln x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln^2x}$,令 $h(x)=\ln x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$

则 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}=\frac{(x-1)(x+2)}{x^3},x>0,x\neq1$

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 递减,$(1,+\infty)$ 递增,$h(x)\geqslant h(1)=0$,即 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 递增,$(1,+\infty)$ 递增 ………………………… 3 分

由洛必达法则得:$\lim\limits_{x\to1}g(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)e^x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{xe^x}{\frac{1}{x}}\right)=e,\lim\limits_{x\to0}g(x)=0,x\to+\infty,g(x)\to+\infty$ …… 4 分

所以:$a\in(0,e)\cup(e,+\infty)$ ………………………… 5 分

(2)由题可知:$(x_0-1)e^{x_0}-a\ln x_0=0$,可得:$a=\frac{(x_0-1)e^{x_0}}{\ln x_0}$,即 $kx_0<\frac{(x_0-1)e^{x_0}}{\ln x_0}$

因为 $x_0\in(0,1)\cup(1,+\infty)$,取 $x_0=\frac{1}{2}$,易得:$k<\frac{\sqrt{e}}{\ln 2}\approx2.38$,所以 k 取 2 ………………………… 6 分

下证：$2x_0 < \dfrac{(x_0-1)e^{x_0}}{\ln x_0}$ 对任意 $x_0 \in (0,1)\cup(1,+\infty)$ 成立

易证：$\ln x \leqslant x-1$ 对 $x>0$ 恒成立，当 $x_0\in(1,+\infty)$ 时，$\dfrac{(x_0-1)e^{x_0}}{\ln x_0} > e^{x_0}$

易证：$e^{x_0} \geqslant ex_0$，所以 $e^{x_0} \geqslant ex_0 > 2x_0$，成立 ………………………………………………………………… 8 分

当 $x_0\in(0,1)$ 时，只需证：$2\ln x_0 > \dfrac{(x_0-1)e^{x_0}}{x_0}$ 成立

方法一：令 $H(x)=(x-1)e^x-2x\ln x, 0<x<1$，只需证 $H(x)<0$

$H'(x)=xe^x-2\ln x-2, H''(x)=(x+1)e^x-\dfrac{2}{x}$，显然 $H''(x)=(x+1)e^x-\dfrac{2}{x}$ 递增

$H''\left(\dfrac12\right)=\dfrac{3\sqrt e}{2}-4<0, H''\left(\dfrac23\right)=\dfrac53\left(e^{\frac23}-\dfrac95\right)>0$，所以存在 $x_1\in\left(\dfrac12,\dfrac23\right)$，使 $H''(x_1)=0$

且 $H'(x)$ 在 $(0,x_1)$ 递减，在 $(x_1,1)$ 递增，

$\begin{cases} H(x)\geqslant H'(x_1)=x_1e^{x_1}-2\ln x_1-2 \\ x_1(x_1+1)e^{x_1}=2 \end{cases}$ 整理得 $H'(x_1)=x_1e^{x_1}-2\ln x_1-2=\dfrac{2}{x_1+1}-2\ln x_1-2$ …… 10 分

因为函数 $y=\dfrac{2}{x+1}-2\ln x-2$ 在 $x\in(0,1)$ 递减，

所以 $H'(x_1)=\dfrac{2}{x_1+1}-2\ln x_1-2>H'\left(\dfrac23\right)=2\ln 3-2\ln 2-\dfrac45>0$

所以 $H'(x)>0$ 在 $x\in(0,1)$ 恒成立，即 $H(x)$ 在 $x\in(0,1)$ 递增

显然 $H(x)<H\left(\dfrac23\right)=\dfrac{-e^{\frac23}+4\ln\frac32}{3}=\dfrac{-0.312}{3}<0$，所以成立 ……………………………………………… 12 分

方法二：令 $G(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x}-2\ln x, 0<x<1$，只需证 $G(x)<0$

$G'(x)=\dfrac{(x^2-x+1)e^x-2x}{x^2}$，令 $\mu(x)=(x^2-x+1)e^x-2x$，则 $\mu'(x)=(x^2+x)e^x-2$ ………… 9 分

显然 $\mu'(x)=(x^2+x)e^x-2$ 递增，且 $\mu'\left(\dfrac12\right)=\dfrac34\sqrt e-2<0$，$\mu'\left(\dfrac23\right)=\dfrac{10}{9}e^{\frac23}-2>0$

所以存在 $x_2\in\left(\dfrac12,\dfrac23\right)$，使 $\mu'(x_2)=0$，且 $\mu(x)$ 在 $(0,x_2)$ 递减，在 $(x_2,1)$ 递增， ……………… 10 分

$\begin{cases} \mu(x)\geqslant\mu(x_2)=(x_2^2-x_2+1)e^{x_2}-2x_2 \\ (x_2^2+x_2)e^{x_2}=2 \end{cases}$ 整理得 $\mu(x_2)=\dfrac{(x_2^2-x_2+1)2}{x_2^2+x_2}-2x_2=\dfrac{2-2x_2-2x_2^3}{x_2^2+x_2}$ …… 11 分

显然 $2-2x_2-2x_2^3$ 在 $x_2\in\left(\dfrac12,\dfrac23\right)$ 递减，所以 $0<2\left(1-\dfrac23-\dfrac{8}{27}\right)<2-2x_2-2x_2^3<2\left(1-\dfrac12-\dfrac18\right)$

所以 $\mu(x)\geqslant\mu(x_2)>0$，即 $G'(x)>0$ 对 $x\in(0,1)$ 恒成立，所以 $G(x)<G(1)=0$，成立……… 12 分

方法三：因为 $e^x\geqslant x+1$ 对任意 $x>0$ 恒成立，$\dfrac{(x_0-1)e^{x_0}}{x_0}<\dfrac{(x_0-1)(x_0+1)}{x_0}=x_0-\dfrac{1}{x_0}$ ………… 9 分

令 $g(x)=x-\dfrac1x-2\ln x, g'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}-2\dfrac1x=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2}>0$

所以 $g(x)$ 在 $x\in(0,1)$ 递增，所以 $g(x)<g(1)=0$，即 $x_0-\dfrac{1}{x_0}<\ln x_0$，………………………… 11 分

所以 $\dfrac{(x_0-1)e^{x_0}}{x_0}<\dfrac{(x_0-1)(x_0+1)}{x_0}=x_0-\dfrac{1}{x_0}$ 成立，即 $H(x)<0$. ………………………………… 12 分