

## 2022 届“江南十校”一模联考 理科数学参考答案、解析及评分细则

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	B	B	A	C	D	C	A	D	B	C

1. 【答案】A.

【解析】 $A = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$ ,  $B = \{x | 0 < x < 4\}$ ,  $\therefore A \cap B = \{x | 3 < x < 4\}$ . 选 A.

2. 【答案】D.

【解析】由题知  $z = 2 + i$ ,  $\bar{z} = 2 - i$  则  $\frac{\bar{z}}{z} = \frac{2-i}{2+i} = \frac{(2-i)^2}{5} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ . 选 D.

3. 【答案】B.

【解析】函数  $f(x) = 2^{|x|}$  为偶函数，且在  $(0, +\infty)$  单调递增， $\therefore \log_2 3 > \log_4 5 > 1$ ,  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ,

$\therefore a = f(\log_{1/5} 3) = f(\log_2 3) > b > c$ . 选 B.

4. 【答案】B.

【解析】由等比数列  $\{a_n\}$  满足  $3a_2$  是  $a_3$  与  $a_1$  的等差中项， $\therefore 6a_2 = a_3 + a_1$ , 即  $q^2 + q - 6 = 0$ , 得  $q = 2$  或

$q = -3$ , 又  $\{a_n\}$  为正项数列，所以  $q = 2$ ,  $\therefore a_3 - a_1 = 3$ ,  $\therefore a_1 = 1$ , 得  $a_5 = a_1 q^4 = 16$ . 选 B.

5. 【答案】A.

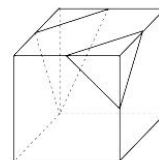
【解析】 $(x-2y)^5$  展开式的第  $r+1$  项为  $C_5^r x^{5-r} (-2y)^r$ , 令  $r=3$ , 可得第 4 项为  $(-2)^3 C_5^3 x^2 y^3$ , 则  $x^2 y^3$

的系数是  $(-2)^3 C_5^3 = -80$ . 选 A.

6. 【答案】C.

【解析】该空间几何体的直观图如图所示，正方体体积为 8，截去的部分为两个三棱锥，

由图示可知空间几何体体积为  $V = 8 - \left( \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1^2 \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1^2 \times 2 \right) = \frac{15}{2}$ . 选 C.



7. 【答案】D.

【解析】甲、乙两位同学在再选科目中没有相同科目的情况有  $C_4^2 C_2^2$  种，在再选科目中恰有一门相同科目

的情况有  $C_4^1 A_3^2$  种，因此，他们的再选科目中至多有一门相同科目的概率是  $\frac{C_4^2 C_2^2 + C_4^1 A_3^2}{(C_4^2)^2} = \frac{5}{6}$ . 选 D.

8. 【答案】C.

【解析】 $\because |2a-b|^2 = 4a^2 + b^2 - 4ab$ , 又  $2ab \leq a^2 + b^2$ , 则  $4a^2 + b^2 - 4ab \geq 2a^2 - b^2 = 1$ ,

$\therefore (2a-b)_{\min} = 1$ . 选 C.

9. 【答案】A.

【解析】由题意可知:  $\frac{d}{t} = \frac{1}{80}$ ,  $\tan \frac{\angle AOB}{2} = \frac{\frac{d}{2}}{t} = \frac{1}{160}$ , 所以  $\tan \angle AOB = \frac{2 \tan \frac{\angle AOB}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\angle AOB}{2}} =$

$\frac{1}{80} \div \frac{1}{160^2 - 1} = \frac{320}{160^2 - 1}$ . 选 A.

10. 【答案】D.

【解析】 $\because f(\pi-x) = \sin(\pi-x) + \frac{1}{2} \sin 2(\pi-x) = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x$ ,  $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$ ,

$\therefore f(\pi-x) \neq f(x)$ , 故 A 选项错误; 而  $f(\frac{3\pi}{2}) = \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin 3\pi = -1 \neq 0$ . 故 B 选项错误; 又

$f(x) = \sin x \cdot (1 + \cos x)$ , 令  $f(x) = 0$  得  $x = k\pi (k \in Z)$ , 所以该函数在区间  $[0, 10]$  内有 4 个零点,

故 C 选项错误; 而  $f'(x) = \cos x + \cos 2x = 2 \cos^2 x + \cos x - 1$ , 由  $x \in [\frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}]$  得  $f'(x) \geq 0$ , 可

知  $f(x)$  在区间  $[\frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}]$  上单调递增. 选 D.

11. 【答案】B.

【解析】由  $S_{\triangle F_1PF_2} = b^2 \cdot \tan \frac{\angle F_1PF_2}{2}$ , 得  $\frac{\sqrt{3}}{3} b^2 = b^2 \tan \frac{\angle F_1PF_2}{2}$ ,  $\therefore \angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$ , 又  $|PF_1| = |PQ|$ ,

所以  $\triangle F_1PQ$  为等边三角形, 由椭圆对称性可知  $PQ \perp x$  轴, 所以  $\frac{|PQ|}{|F_1F_2|} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ . 选 B.

12. 【答案】C.

【解析】由题设可知, 要使  $f(x) \geq 3$  成立, 则  $f(0) \geq 3$ , 即  $a \cdot e^{-2} + \ln a \geq 3$ ,  $\therefore a \geq e^2$ . 下证: 当  $a \geq e^2$  时,

$f(x) \geq 3$  恒成立,  $\therefore a \geq e^2$ ,  $\therefore f(x) \geq e^{2-x} - \frac{1}{2} x^2 - \ln(x+1) + 2$ , 易知  $e^{|x|} \geq 1 + |x| + \frac{1}{2} x^2$ ,  $\ln(x+1) \leq x$  (当

$x=0$  时, 两式等号成立) 则  $f(x) \geq 1 + |x| - x + 2 = 3 + |x| - x \geq 3$ , 得证. 所以  $a \in [e^2, +\infty)$ . 选 C.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 【答案】 $\pm\sqrt{2}$

【解析】由  $|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2$  可得  $a \cdot b = 0$ ,  $\therefore -t^2 + 2 = 0$ , 得  $t = \pm\sqrt{2}$ .

14. 【答案】  $\frac{5}{3}$

【解析】由双曲线性质易知  $|F_1P| = 4b, |F_2P| = 2c$ , 又由双曲线定义可知  $|F_1P| - |F_2P| = 2a$ , 即  $4b - 2c = 2a$ , 而  $b^2 = c^2 - a^2$ , 可得  $5a^2 + 2ac - 3c^2 = 0$ , 即  $(a+c)(5a-3c) = 0$ , 所以  $C$  的离心率  $e = \frac{5}{3}$ .

15. 【答案】  $-337\sqrt{3}$

【解析】  $\{\sin \frac{2n\pi}{3}\}$  的最小正周期为 3, 则  $a_{3n-2} = (3n-2) \sin \frac{2\pi(3n-2)}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}(3n-2)$ ;  
 $a_{3n-1} = (3n-1) \sin \frac{2\pi(3n-1)}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(3n-1)$ ;  $a_{3n} = 3n \sin \frac{2\pi \cdot 3n}{3} = 0 \therefore a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

所以  $S_{2022} = \frac{2022}{3} \times (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -337\sqrt{3}$ .

16. 【答案】  $\frac{2\sqrt{2}\pi}{5}$

【解析】设该半多面体是由棱长为 2 的正方体沿正方体各棱的中点截去 8 个三棱锥所得, 内侧即为二十四等边体, 其体积  $V_1 = 2 \times 2 \times 2 - 8 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{20}{3}$ ;

由二十四等边体的对称性可知, 其外接球的球心即为正方体中心, 半径为中心到一个顶点的距离, 则

$R = \sqrt{2}$ , 故  $V_2 = \frac{4}{3} \pi (\sqrt{2})^3 = \frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$ , 从而  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{5}$ .

### 三、解答题: 共 70 分.

(一) 必考题: 共 60 分

17. 【解析】(1) 由已知得,  $\frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\sin A}{2 - \cos A}$ , 即  $\sin A \cos C = 2 \sin C - \cos A \sin C$ ,

得  $\sin(A+C) = 2 \sin C$ , ..... 3 分

即  $\sin B = 2 \sin C$ ,

由正弦定理得  $b = 2c$ , 所以  $\frac{b}{c} = 2$ . ..... 6 分

(2) 由 (1) 知  $\frac{b}{c} = 2$ , 因为  $e = 2$ , 所以  $b = 4$ , ..... 7 分

设  $\triangle ABC$  的内切圆半径为  $r$ , 则内心  $N$  到  $BC$  边的距离为  $r$ , 因为  $MN \parallel BC$ , 所以重心  $M$  到  $BC$  边的距离为  $r$ , 根据重心的性质, 顶点  $A$  到  $BC$  边的距离为  $3r$ ,

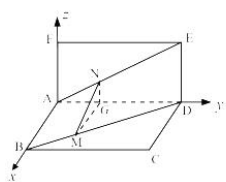
根据面积关系得  $\frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r = \frac{1}{2}a \cdot (3r)$ , ..... 10 分

即  $\frac{1}{2}(a+4+2) \cdot r = \frac{1}{2}a \cdot (3r)$ , 所以  $a=3$ . ..... 12分

18. 【解析】(1) 过  $N$  作  $NN' \parallel AD$  与  $ED$  交于  $N'$  点, 过  $M$  作  $MM' \parallel AD$  与  $CD$  交于  $M'$  点, 连接  $M'N'$ .  
由  $BM = AN$ , 易知  $NN' = MM'$ , 又  $NN' \parallel AD \parallel MM'$ , 则四边形  $MNN'M'$  为平行四边形,  
所以  $MN \parallel M'N'$ ,

$\therefore MN \not\subset$  平面  $CDE$ ,  $M'N' \subset$  平面  $CDE$ ,  $\therefore MN \parallel$  平面  $CDE$ . ..... 4分

(2) 方法一: 由平面  $ABCD \perp$  平面  $ADEF$ , 平面  $ABCD \cap$  平面  $ADEF = AD$ ,  $AF \subset$  平面  $ADEF$ ,  
 $AF \perp AD$ , 可得  $AF \perp$  平面  $ABCD$ . 如图所示, 建立空间直角坐标系, 过  $M$  点



作  $MG \perp AD$ , 垂足为  $G$ , 连接  $NG$ , 易知  $NG \perp AD$ . 设  $AG = a (0 < a < 2)$ ,

可得  $M(\frac{2-a}{2}, a, 0), N(0, a, \frac{a}{2})$ ,  $\therefore |MN| = \sqrt{(\frac{2-a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{\frac{(a-1)^2 + 1}{2}}$ .

可知当  $a=1$  时,  $MN$  长最小值为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . ..... 6分

此时  $M(\frac{1}{2}, 1, 0), N(0, 1, \frac{1}{2}), A(0, 0, 0), D(0, 2, 0)$ ,  $\therefore \vec{AM} = (\frac{1}{2}, 1, 0), \vec{MN} = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), \vec{DM} = (\frac{1}{2}, -1, 0)$ ,

设平面  $AMN$  的法向量为  $\vec{m} = (x_1, y_1, z_1)$ , 由  $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AM} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{MN} = 0 \end{cases}$  可得  $\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + y_1 = 0 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}z_1 = 0 \end{cases}$  令  $x_1 = 2$ , 可得

$\vec{m} = (2, -1, 2)$ . ..... 8分

设平面  $MND$  的法向量为  $\vec{n} = (x_2, y_2, z_2)$ , 由  $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{DM} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{MN} = 0 \end{cases}$  可得  $\begin{cases} \frac{1}{2}x_2 - y_2 = 0 \\ -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}z_2 = 0 \end{cases}$  令  $x_2 = 2$ , 可得

$\vec{n} = (2, 1, 2)$ . ..... 10分

$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{7}{9}$ .

易知二面角  $A-MN-D$  为钝二面角, 则二面角  $A-MN-D$  的余弦值为  $-\frac{7}{9}$ . ..... 12分

方法二: 过  $N$  作  $NG \perp AD$ , 连接  $MG$ , 由平面  $ABCD \perp$  平面  $ADEF$ , 平面  $ABCD \cap$  平面  $ADEF = AD$ ,  
 $NG \subset$  平面  $ADEF$ ,  $NG \perp AD$ , 可得  $NG \perp$  平面  $ABCD$ ,  $\therefore NG \perp MG$ ,  
设  $NG = \lambda ED = \lambda (0 < \lambda < 1)$ , 则  $MG = (1-\lambda)AB = 1-\lambda$ ,

所以  $MN = \sqrt{\lambda^2 + (1-\lambda)^2} = \sqrt{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}$ , 当  $\lambda = \frac{1}{2}$  时,  $MN$  取得最小值. .... 6分



此时  $M, N$  分别为  $BD, AE$  的中点, 计算得  $AN = AM = DM = DN = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ,  $MN = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

取  $MN$  的中点  $H$ , 连接  $AH, DH$ , 则  $AH \perp MN, DH \perp MN$ , 所以  $\angle AHD$  为二面角  $A-MN-D$  的平面角.

计算得  $AH = DH = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ . .....9分

$\cos \angle AHD = \frac{AH^2 + DH^2 - AD^2}{2AH \cdot DH} = \frac{\frac{9}{8} + \frac{9}{8} - 4}{2 \times \frac{9}{8}} = -\frac{7}{9}$ , 则二面角  $A-MN-D$  的余弦值为  $-\frac{7}{9}$ . .....12分

19. 【解析】(1) 易知焦点  $F(1,0)$ , 设  $P(x_0, y_0), A(x_1, y_1)$  由  $\overrightarrow{PF} = 4\overrightarrow{FA}$  得  $y_0 = -4y_1$  ①.

设直线  $l: x = my + 1$ , 与抛物线  $C: y^2 = 4x$  联立得  $y^2 - 4my - 4 = 0$ , 其中  $\Delta = 16m^2 + 16 > 0$ ,

所以  $y_0 y_1 = -4$  ②. ....2分

由①②可得  $\begin{cases} y_0 = 4 \\ y_1 = -1 \end{cases}$  或  $\begin{cases} y_0 = -4 \\ y_1 = 1 \end{cases}$  .....3分

又  $y_0 + y_1 = 4m$ , 所以  $m = \frac{3}{4}$  或  $m = -\frac{3}{4}$ ,

所以直线  $l$  的方程为  $x = \frac{3}{4}y + 1$  或  $x = -\frac{3}{4}y + 1$ .

化简得  $4x - 3y - 4 = 0$  或  $4x + 3y - 4 = 0$ . .....5分

(2) 由  $\overrightarrow{PF} = \lambda \overrightarrow{FA}$  得  $\lambda = -\frac{y_0}{y_1}$  ③.

又②③可得  $\lambda = \frac{y_0^2}{4}$ , .....7分

设点  $B(x_2, y_2)$ , 由  $\overrightarrow{PE} = \mu \overrightarrow{EB}$  得  $\mu = -\frac{y_0}{y_2}$  ④.

设直线  $PB: x = ny + a$ , 与抛物线  $C: y^2 = 4x$  联立得  $y^2 - 4ny - 4a = 0$ .

所以  $\Delta = 16(n^2 + a) > 0$ ,  $y_0 y_2 = -4a$  ⑤.

由④⑤可得  $\mu = \frac{y_0^2}{4a}$ , .....10分

又  $\lambda = 4\mu$ , 所以  $\frac{y_0^2}{4} = 4 \cdot \frac{y_0^2}{4a}$ , 考虑到点  $P$  异于原点, 所以  $y_0 \neq 0$ ,



解得  $a = 4$ ，此时  $\Delta = 16(n^2 + a) = 16(n^2 + 4) > 0$ ，

所以  $a$  的值为 4. ....12 分

20. 【解析】(1) ①记“从盒子中先后任意飞出两只昆虫，恰有 1 只蜜蜂”为事件  $A$ ，设盒子中蜜蜂的只数为  $x(x \in N^*)$ ，则  $P(A) = \frac{C_x^1 \cdot C_{8-x}^1}{C_8^2} = \frac{4}{7}$ ，解得： $x = 4$ ，故蜜蜂共有 4 只. ....2 分

②随机变量  $X$  的取值为 0, 1, 2, 3

$$P(X=0) = \frac{C_4^3}{C_8^3} = \frac{4}{56} = \frac{1}{14}, P(X=1) = \frac{C_4^1 C_4^2}{C_8^3} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}, P(X=2) = \frac{C_4^2 C_4^1}{C_8^3} = \frac{3}{7}, P(X=3) = \frac{C_4^3}{C_8^3} = \frac{1}{14}$$

故  $X$  的分布列为：

$X$	0	1	2	3
$P$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

.....6 分

$$E(X) = 1 \times \frac{3}{7} + 2 \times \frac{3}{7} + 3 \times \frac{1}{14} = \frac{3}{2}. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

(2) 解：记“任意飞出两只昆虫，至少有 1 只是蝴蝶”为事件  $B$ ，则事件  $\bar{B}$  为“任意飞出两只昆虫，其中没有蝴蝶”；

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_n^2}{C_{2n}^2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4(2n-1)} \quad (n \geq 4, n \in N). \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{当 } n=4 \text{ 时, } (P(B))_{\max} = \frac{3}{4} + \frac{1}{28} = \frac{11}{14}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 【解析】(1)  $f'(x) = 2a - 1 - \frac{2a}{x} + \frac{1}{x^2}, (x > 0)$

$$= \frac{(2a-1)x^2 - 2ax + 1}{x^2} = \frac{[(2a-1)x-1](x-1)}{x^2}. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

①若  $a \leq \frac{1}{2}$ ，当  $x \in (0,1)$  时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$  单调递增；当  $x \in (1, +\infty)$  时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$  单调递减. ....3 分

②若  $\frac{1}{2} < a < 1$ ，当  $x \in (0,1)$  时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$  单调递增；当  $x \in (1, \frac{1}{2a-1})$  时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$  单调递减；当  $x \in (\frac{1}{2a-1}, +\infty)$  时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$  单调递增. ....4 分

③若  $a = 1$ ，则  $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2} \geq 0$ ， $f(x)$  在  $x \in (0, +\infty)$  单调递增. ....5 分

④若  $a > 1$ , 当  $x \in (0, \frac{1}{2a-1})$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增; 当  $x \in (\frac{1}{2a-1}, 1)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减; 当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增.

综上: 当  $a \leq \frac{1}{2}$  时,  $f(x)$  单增区间为  $(0, 1)$ ,  $f(x)$  单减区间为  $(1, +\infty)$ ;

当  $\frac{1}{2} < a < 1$  时,  $f(x)$  单增区间为  $(0, 1)$ ,  $(\frac{1}{2a-1}, +\infty)$ ;  $f(x)$  单减区间为  $(1, \frac{1}{2a-1})$ ;

当  $a = 1$  时,  $f(x)$  单增区间为  $(0, +\infty)$ ,  $f(x)$  无单减区间;

当  $a > 1$  时,  $f(x)$  单增区间为  $(0, \frac{1}{2a-1})$ ,  $(1, +\infty)$ ;  $f(x)$  单减区间为  $(\frac{1}{2a-1}, 1)$ . .....6分

(2) 由 (1) 可知当  $\frac{1}{2} < a < 1$  时,  $f(x)$  在  $x = \frac{1}{2a-1}$  时取得最小值  $f(\frac{1}{2a-1})$ . .....7分

要证:  $f(x) > \frac{2(a-1)(a^3+1)}{2a-1}$  对  $x \in (1, +\infty)$  恒成立, 等价于求证:  $f(\frac{1}{2a-1}) > \frac{2(a-1)(a^3+1)}{2a-1}$ ,

即证:  $1 - 2a \ln(\frac{1}{2a-1}) - (2a-1) > \frac{2(a-1)(a^3+1)}{2a-1}$ .

法一: 设  $g(x) = \ln x - (x-1)$  ( $x > 1$ ), 则  $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} < 0$ ,  $\therefore g(x) < g(1) = 0$ , 即  $\ln x < x-1$  ( $x > 1$ )

$\therefore \ln(\frac{1}{2a-1}) < \frac{1}{2a-1} - 1 = \frac{2-2a}{2a-1}$ . .....9分

则  $1 - 2a \ln(\frac{1}{2a-1}) - (2a-1) > 1 - 2a \cdot \frac{2-2a}{2a-1} - (2a-1) = \frac{2(a-1)}{2a-1}$ .

而  $\frac{1}{2} < a < 1$ , 则  $\frac{2(a-1)}{2a-1} < 0$ ,  $\therefore \frac{2(a-1)}{2a-1} > \frac{2(a-1)(a^3+1)}{2a-1}$ , 即得  $f(\frac{1}{2a-1}) > \frac{2(a-1)(a^3+1)}{2a-1}$ ,

$\therefore f(x) > \frac{2(a-1)(a^3+1)}{2a-1}$  对  $x \in (1, +\infty)$  恒成立. ....12分

法二: 即证:  $-2a \ln(\frac{1}{2a-1}) > \frac{2(a-1)a(a^2+2)}{2a-1}$ , 化简即证:  $\ln(2a-1) > \frac{(a-1)(a^2+2)}{2a-1}$ .

设  $2a-1 = t$  ( $0 < t < 1$ ), 即证:  $\ln t > \frac{t^3+t^2+7t-9}{8t} = \frac{1}{8}(t^2+t+7-\frac{9}{t})$ . .....9分

构造函数  $g(t) = 8 \ln t - t^2 - t - 7 + \frac{9}{t}$  ( $0 < t < 1$ ), 则  $g'(t) = \frac{8}{t} - 2t - 1 - \frac{9}{t^2} = \frac{-2t^3 - t^2 + 8t - 9}{t^2}$ ,

设函数  $h(t) = -2t^3 - t^2 + 8t - 9$  ( $0 < t < 1$ ), 则  $h'(t) = -6t^2 - 2t + 8 = -(t+1)(6t+8) > 0$ , 所以函数  $h(t)$  在  $(0, 1)$  内单调递增,  $h(t) < h(1) < 0$ , 则  $g'(t) < 0$ , 所以函数  $g(t)$  在  $(0, 1)$  内单调递减, 所以  $g(t) > g(1) = 0$

即  $\ln t > \frac{1}{8}(t^2 + t + 7 - \frac{9}{t})$ , 原式得证. ....12分

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

【解析】(1) 由  $\rho = |\sin \theta| + |\cos \theta|$ , 可知  $\rho > 0$ . ....1分

所以  $\rho^2 = |\rho \sin \theta| + |\rho \cos \theta|$ ,

又  $\rho^2 = x^2 + y^2, x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ ,

则曲线 C 的直角坐标方程为  $x^2 + y^2 = |x| + |y|$  ( $x, y$  不同时为 0). ....4分

(2) 当  $x > 0, y > 0$  时, 得曲线 C 的第一象限内的直角坐标方程:  $x^2 + y^2 = x + y$ , 配方得

$(x - \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$ , ....5分

则曲线 C 在第一象限内的图形由一个直角边为 1 的等腰直角三角形和一个半径为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  的半圆组成. ....7分

易知, 曲线 C 在第一象限内的围成的图形面积为  $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$ ,

结合对称性可知曲线 C 围成的图形的面积为  $2 + \pi$ . ....10分

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

【解析】(1) 当  $a = 2$  时, 则  $|2x + 2| + |2x - 1| \geq 4$ , 当  $x < -1$  时, 不等式化为  $-4x - 1 \geq 4$ , 可得  $x \leq -\frac{5}{4}$ ;

当  $-1 \leq x < \frac{1}{2}$  时, 不等式化为  $3 \geq 4$ , 不成立;

当  $x \geq \frac{1}{2}$  时, 不等式化为  $4x + 1 \geq 4$ , 可得  $x \geq \frac{3}{4}$ . ....3分

综上可得不等式的解集为  $\{x | x \leq -\frac{5}{4} \text{ 或 } x \geq \frac{3}{4}\}$ . ....5分

(1) 因为存在  $x_0 \in \mathbf{R}$ , 使得  $f(x_0) < 4 = g(x_0 + a)$  成立, 即使得  $|2x_0 + a| < 4 - |2x_0 + 2a - 1|$  成立,

$\therefore (|2x_0 + a| + |2x_0 + 2a - 1|)_{\min} < 4$ . ....7分

由绝对值不等式可知:  $|2x_0 + a| + |2x_0 + 2a - 1| \geq |2x_0 + a - 2x_0 - 2a + 1|$

$= |-a + 1|$ , ....9分

即  $|a - 1| < 4$  可得  $a$  的取值范围为  $\{a | -3 < a < 5\}$ . ....10分



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

