高三数学参考答案及评分标准

2020.1

一、单项选择题(每小题5分,共40分)

1－4 BBCB　5－8 ADAC

二、多项选择题(每小题5分,共20分)

9. AB　10. BD　11. AD　12. ACD

三、填空题(每小题5分,共20分)

13. ± 2　14. 9　15. $\sqrt{10}-1$　16. $\frac{9}{8}$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

四、解答题(本大题共6小题,共70分)

17. 解:(1)设数列$\{a_n\}$的公差为d,

由题意知:$a_1+a_2+a_3+a_4=4a_1+\frac{4\times(4-1)}{2}d=4a_1+6d=10$　①

又因为a_1,a_2,a_4成等比数列,

所以$a_2^2=a_1\cdot a_4$,　…………………………………………………… 2分

$(a_1+d)^2=a_1\cdot(a_1+3d)$,

$d^2=a_1d$,

又因为$d\neq 0$,

所以$a_1=d$.　②

由①②得$a_1=1,d=1$,

所以$a_n=n,b_n=2^{n-1}$.　………………………………………………… 5分

(2)因为$c_n=2^{n-1}+\frac{1}{n(n+1)}$,

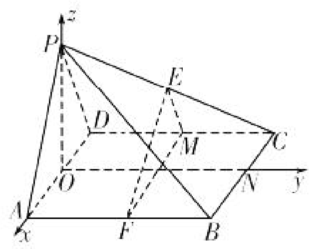
所以$S_n=2^0+2^1+\cdots+2^{n-1}+(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$

$=\frac{1-2^n}{1-2}+1-\frac{1}{n+1}$

$=2^n-\frac{1}{n+1}$,

所以数列$\{c_n\}$的前n项和$S_n=2^n-\frac{1}{n+1}$.　…………………………… 10分

18. (1)证明:取CD的中点M,连接EM,FM,



因为E、F分别为PC和AB的中点,四边形$ABCD$为正方形,

所以$EM\parallel PD$,$FM\parallel AD$,　………………………… 2分

因为$EM,FM\subset$平面EFM,$PD,AD\subset$平面PAD,

所以平面$EFM\parallel$平面PAD,

因为$EF\subset$平面EFM,

所以$EF\parallel$平面PAD.　………………………………………………… 4分

(2)因为平面$PAD\perp$平面$ABCD$,平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$,$CD\perp AD$,

$CD\subset$平面$ABCD$,

所以 $CD\perp$平面 PAD,

所以 $CD\perp PD$ ………………………………………………………… 5 分

因为 $AB/\!/CD$,

所以$\angle PCD$ 就是直线 PC 与 AB 所成的角,

所以 $\tan\angle PCD=\dfrac{PD}{DC}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, ………………………………………… 6 分

设 $PD=\sqrt{5}$,$CD=2$,

分别取 AD 和 BC 的中点 O,N,连 PO,ON,

因为 $PA=PD$,

所以 $PO\perp AD$,

因为平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$,平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$,$PO\subset$平面 PAD,

所以 $PO\perp$平面 $ABCD$, ………………………………………………… 7 分

如图,建立空间直角坐标系 $O-xyz$,

则 $P(0,0,2)$,$C(-1,2,0)$,$B(1,2,0)$,

所以$\overrightarrow{CB}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{CP}=(1,-2,2)$, ……………………………………… 8 分

设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$是平面 BPC 的一个法向量,则$\begin{cases}x-2y+2z=0\\x=0\end{cases}$

取 $y=1$,则 $z=1$,所以 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$,

$\boldsymbol{n}=(0,1,0)$是平面 PAD 的一个法向量, …………………………………… 10 分

所以 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\pi}{4}$,

所以所求二面角的大小为$\dfrac{\pi}{4}$. ……………………………………………… 12 分

19. 解:若选择条件①,则答案为:

(1)在$\triangle ABC$ 中,由正弦定理得 $3\sin A\sin C=4\sin C\cos A$, ……………………… 2 分

因为 $\sin C\neq0$,所以 $3\sin A=4\cos A$,$9\sin^2A=16\cos^2A$,

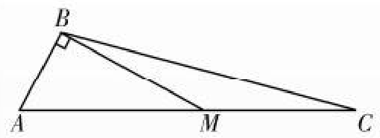
所以 $25\sin^2A=16$,因为 $\sin A>0$,所以 $\sin A=\dfrac{4}{5}$. ……………………………… 5 分

(2)解法 1:设 $BM=MC=m$,易知 $\cos\angle BMC=-\cos\angle BMA=-\sin A=-\dfrac{4}{5}$, … 7 分

在$\triangle BMC$ 中由余弦定理得:$18=2m^2-2m^2\cdot(-\dfrac{4}{5})$,解得 $m=\sqrt{5}$,

所以 $S_{\triangle BMC}=\dfrac{1}{2}m^2\sin\angle BMC=\dfrac{1}{2}\times5\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{2}$, ……………………………… 9 分

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABM$ 中,$\sin A=\dfrac{4}{5}$,$BM=\sqrt{5}$,$\angle ABM=\dfrac{\pi}{2}$,



所以 $AB=\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$,所以 $S_{\triangle ABM}=\dfrac{15}{8}$,

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{15}{8}=\dfrac{27}{8}$. ………………………………………………… 12 分

解法 2:因为 $MB=MC$,所以$\angle MBC=\angle C$,

因为$\angle ABM=\dfrac{\pi}{2}$,所以$\angle A+2\angle C=\dfrac{\pi}{2}$,$2\angle C=\dfrac{\pi}{2}-\angle A$,

所以 $\sin 2C=\sin(\frac{\pi}{2}-A)=\cos A$，

因为 A 为锐角，所以 $\sin 2C=\cos A=\frac{3}{5}$， ………………………………………… 7 分

又 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{15\sqrt{2}}{4}$，

所以 $b=\frac{15\sqrt{2}}{4}\sin B$，$c=\frac{15\sqrt{2}}{4}\sin C$， ………………………………………… 9 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{15\sqrt{2}}{4}\sin B\times\frac{15\sqrt{2}}{4}\sin C\times\frac{4}{5}=\frac{45}{4}\sin(\frac{\pi}{2}+C)\sin C$

$=\frac{45}{4}\sin C\cos C=\frac{45}{8}\sin 2C=\frac{27}{8}$. ………………………………………… 12 分

若选择条件②，则答案为：

(1)因为 $2b\sin\frac{B+C}{2}=\sqrt{5}a\sin B$，所以 $2b\sin\frac{\pi-A}{2}=\sqrt{5}a\sin B$，

由正弦定理得 $2\sin B\cos\frac{A}{2}=\sqrt{5}\sin A\sin B$， ………………………………………… 2 分

因为 $\sin B\neq 0$，所以 $2\cos\frac{A}{2}=\sqrt{5}\sin A$，$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{5}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$，

因为 $\cos\frac{A}{2}\neq 0$，所以 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，

则 $\cos\frac{A}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，所以 $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{4}{5}$. ………………………………… 5 分

(2)同选择①

20. 解：(1)由频率分布直方图可知，$P=0.01$，

所以 $n=\frac{10}{0.1}=100$. ………………………………………………………… 2 分

(2)因为 $n=100$，所以"读书之星"有 $100\times 0.25=25$，

从而 2×2 列联表如下图所示：

	非读书之星	读书之星	总计
男	30	15	45
女	45	10	55
总计	75	25	100

………………………… 4 分

将 2×2 列联表中的数据代入公式计算得

$K^2=\frac{100\times(30\times 10-15\times 45)^2}{45\times 55\times 75\times 25}=\frac{100}{33}\approx 3.030$，

因为 $3.030<3.841$，所以没有 95% 以上的把握认为"读书之星"与性别有关. ……… 6 分

(3)将频率视为概率，即从该地区学生中抽取一名学生是"读书之星"的概率为 $\frac{1}{4}$.

由题意可知 $X\sim B(3,\frac{1}{4})$，

所以 $P(X=0)=C_3^0(\frac{1}{4})^0\times(1-\frac{1}{4})^3=\frac{27}{64}$,

$P(X=1)=C_3^1\times\frac{1}{4}\times(1-\frac{1}{4})^2=\frac{27}{64}$,

$P(X=2)=C_3^2\times(\frac{1}{4})^2\times(1-\frac{1}{4})=\frac{9}{64}$,

$P(X=3)=C_3^3\times(\frac{1}{4})^3=\frac{1}{64}$, ………………………………………………………… 10 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

故 $E(X)=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. ………………………………………………………… 12 分

21. 解:(1)由题意知 $|CA|+|CB|=|CP|+|CQ|+|AP|+|BQ|$
$=2|CP|+|AB|=4>|AB|$.

所以曲线 E 是以 A,B 为焦点,长轴长为 4 的椭圆(除去与 x 轴的交点). ……… 2 分

设曲线 E:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0,y\neq0)$则 $c=1,2a=4$,

即 $a=2,b^2=a^2-c^2=3$,

所以曲线 E 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(y\neq0)$ ………………………………………… 4 分

(2)因为 $HA\perp x$ 轴,所以 $H(-1,\frac{3}{2})$. 设 $S(0,y_0)$,

所以$\frac{-y_0}{-2}=\frac{-\frac{3}{2}}{3}$,所以 $y_0=1$,则 $S(0,1)$.

因为 $a=2c$,所以$|SG|=2|SH|$,

所以$\frac{S_{\triangle SMG}}{S_{\triangle SHN}}=\frac{\frac{1}{2}|SM||SG|\sin\angle MSG}{\frac{1}{2}|SN||SH|\sin\angle NSH}=\frac{2|SM|}{|SN|}=6$,

所以$\frac{|SM|}{|SN|}=3$,所以$\overrightarrow{SM}=-3\overrightarrow{SN}$,

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$,则$\overrightarrow{SM}=(x_1,y_1-1)$,
$\overrightarrow{SN}=(x_2,y_2-1)$,所以 $x_1=-3x_2$, ………………………………………… 6 分

①当直线 MN 斜率不存在时,MN 方程为 $x=0$

此时$\frac{|SM|}{|SN|}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$,不符合条件舍去.

②当直线 MN 的斜率存在时,设直线 MN 的方程为 $y=kx+1$.

联立$\begin{cases}y=kx+1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得$(3+4k^2)x^2+8kx-8=0$,

所以$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{-8k}{3+4k^2}\\x_1\cdot x_2=\dfrac{-8}{3+4k^2}\end{cases}$，…………………………………………………………………… 9 分

将 $x_1=-3x_2$ 代入得

$\begin{cases}-2x_2=\dfrac{-8k}{3+4k^2}\\3x_2^2=\dfrac{8}{3+4k^2}\end{cases}$，所以 $3\left(\dfrac{4k}{3+4k^2}\right)^2=\dfrac{8}{3+4k^2}$，

所以 $k^2=\dfrac{3}{2}$，$k=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

所以直线 MN 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{6}}{2}x+1$ 或 $y=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}x+1$. ……………………………… 12 分

22. 解：(1) $f'(x)=ae^x-1$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$ 恒成立，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$，解得 $x=-\ln a$，

由于 $a>0$ 时，导函数 $f'(x)=ae^x-1$ 单调递增，

故 $x\in(-\infty,-\ln a)$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

$x\in(-\ln a,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

…………………………………………………………………………………… 4 分

(2) 曲线 $C_1:y_1=ae^x$ 与曲线 $C_2:y_2=x^2$ 存在唯一公切线，设该公切线与 C_1，C_2 分别切于点 (x_1,ae^{x_1})，(x_2,x_2^2)，显然 $x_1\neq x_2$，

由于 $y'_1=ae^x$，$y'_2=2x$，

所以 $ae^{x_1}=2x_2=\dfrac{ae^{x_1}-x_2^2}{x_1-x_2}$， ………………………………………………………… 5 分

由于 $a>0$，故 $x_2>0$，且 $x_2=2x_1-2>0$

因此 $x_1>1$，

此时 $a=\dfrac{2x_2}{e^{x_1}}=\dfrac{4(x_1-1)}{e^{x_1}}\quad(x_1>1)$，

设 $F(x)=\dfrac{4(x-1)}{e^x}\quad(x>1)$，

问题等价于直线 $y=a$ 与曲线 $y=F(x)$ 在 $x>1$ 时有且只有一个公共点，

又 $F'(x)=\dfrac{4(2-x)}{e^x}$，令 $F'(x)=0$，解得 $x=2$，

则 $F(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，$(2,+\infty)$ 上单调递减，

而 $F(2)=\dfrac{4}{e^2}$，$F(1)=0$，当 $x\to+\infty$ 时，$F(x)\to 0$，

所以 $F(x)$ 的值域为 $(0,\dfrac{4}{e^2}]$，

故 $a=\dfrac{4}{e^2}$. …………………………………………………………………………… 8 分

(3)当 $a=1$ 时,$f(x)=e^x-x-1$,问题等价于不等式

$e^x-x-1\geqslant kx\ln(x+1)$,当 $x\geqslant 0$ 时恒成立.

设 $h(x)=e^x-x-1-kx\ln(x+1)(x\geqslant 0)$,$h(0)=0$,

又设 $m(x)=h'(x)=e^x-1-k[\ln(x+1)+\frac{x}{1+x}](x\geqslant 0)$,

则 $m'(x)=e^x-k[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}]$,

而 $m'(0)=1-2k$.

(i)当 $1-2k\geqslant 0$ 时,即 $k\leqslant\frac{1}{2}$时,

由于 $x\geqslant 0$,$e^x\geqslant 1$,$k[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}]\leqslant\frac{1}{2}[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}]\leqslant 1$,

此时 $m'(x)\geqslant 0$,$m(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增.

所以 $m(x)\geqslant m(0)=0$

即 $h'(x)\geqslant 0$,所以 $h(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增

所以 $h(x)\geqslant h(0)=0$,

即 $e^x-x-1-kx\ln(x+1)\geqslant 0$,

故 $k\leqslant\frac{1}{2}$适合题意. …………………………………………………………… 10 分

(ii)当 $k>\frac{1}{2}$时,$m'(0)<0$,

由于 $m'(x)=e^x-k[\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}]$在$[0,+\infty)$上单调递增,

令 $x=\ln(2k)>0$,

则 $m'(\ln 2k)=2k-k[\frac{1}{1+\ln 2k}+\frac{1}{(1+\ln 2k)^2}]>2k-2k=0$,

故在$(0,\ln 2k)$上存在唯一 x_0,使 $m'(x_0)=0$,

因此当 $x\in(0,x_0)$时,$m'(x)<0$,$m(x)$单调递减,

所以 $m(x)<m(0)=0$,

即 $h'(x)\leqslant 0$,$h(x)$在$(0,x_0)$上单调递减,

故 $h(x)<h(0)=0$,

亦即 $e^x-x-1-kx\ln(x+1)<0$,

故 $k>\frac{1}{2}$时不适合题意.

综上,所求 k 的取值范围为$(-\infty,\frac{1}{2}]$. ……………………………………………… 12 分