

## 2019 年新疆数学竞赛预赛试题和参考答案

1. 已知集合  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ , 则是集合  $U$  的子集但不是集合  $A$  的子集, 也不是集合  $B$  的子集的集合个数为 \_\_\_\_\_.

**解法一:** 因为  $A \cup B = U$  且  $A \cap B = \{4, 5\}$ , 所以满足题意的集合所含的元素至少在  $\{1, 2, 3\}$  中取一个且至少在  $\{6, 7, 8\}$  中取一个, 集合  $\{4, 5\}$  中的元素可取或不取, 于是满足题意的集合共有

$$(2^3 - 1)(2^3 - 1) \times 2^2 = 196 \text{ 个}.$$

**解法二:** 集合  $U$  的子集个数为  $2^8$ , 其中是集合  $A$  或集合  $B$  的子集个数为  $2^5 + 2^5 - 2^2$ . 所以满足条件的集合个数为

$$2^8 - (2^5 + 2^5 - 2^2) = 196 \text{ 个}.$$

2. 设  $n$  为正整数. 若  $1 + 2 + \cdots + n$  的和恰好等于一个三位数且该三位数的每个数字均相同, 则所有可能的  $n$  值为 \_\_\_\_\_.

**解:** 设  $1 + 2 + \cdots + n = \overline{aaa}$ , 化简可得  $\frac{n(n+1)}{2} = 111 \times a$ . 由于  $111 = 3 \times 37$  且 37 是素数, 故  $n$  和  $n+1$  中要有一个被 37 整除. 再由  $1 + 2 + \cdots + n < 1000$ , 可知  $n < 45$ . 因此  $n = 36$  或 37. 经计算,  $1 + 2 + \cdots + 36 = 666$  且  $1 + 2 + \cdots + 37 = 703$ , 故  $n = 36$ .

3. 已知  $x, y, z$  是正数且满足

$$\begin{cases} x + y + xy = 8 \\ y + z + yz = 15 \\ z + x + zx = 35 \end{cases}, \text{ 则 } x + y + z + xy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

解: 由  $x + y + xy = 8$  知  $x + y + xy + 1 = 9$  即

$$(1+x)(1+y) = 9. \quad (1)$$

同理可得

$$\begin{cases} (1+y)(1+z) = 16 \\ (1+z)(1+x) = 36 \end{cases}. \quad (2)$$

结合 (1) 和 (2) 可得

$$(1+x)(1+y)(1+z) = 3 \times 4 \times 6. \quad (3)$$

由 (1) 和 (3) 可知  $z = 7$ . 同理可得  $x = 7/2$  和  $y = 1$ . 从而  $x + y + z + xy = 15$ .

4. 随机取一个由 0 和 1 构成的 8 位数, 它的偶数位数字之和与奇数位数字之和相等的概率为\_\_\_\_\_.

解: 设  $n$  是满足题意的 8 位数, 故知其偶数位上的 1 的个数和在奇数位上的 1 的个数相同, 从而在奇数位上与偶数位上的 1 的个数可能为 1, 2, 3 或 4. 注意到首位为 1, 下面分情况讨论:

- (i) 奇数位上与偶数位上有 1 个 1, 3 个 0, 共有  $C_3^0 \cdot C_4^1 = 4$  种可能;
- (ii) 奇数位上与偶数位上有 2 个 1, 2 个 0, 共有  $C_3^1 \cdot C_4^2 = 18$  种可能;
- (iii) 奇数位上与偶数位上有 3 个 1, 1 个 0, 共有  $C_3^2 \cdot C_4^3 = 12$  种可能;
- (iv) 奇数位上与偶数位上有 4 个 1, 共有  $C_3^3 \cdot C_4^4 = 1$  种可能;

合计共有  $4 + 18 + 12 + 1 = 35$  个满足条件的自然数  $n$ . 又因为 0 和 1 构成的 8 位数共有  $2^7 = 128$  个, 从而概率为  $\frac{35}{128}$ .

5. 设  $\frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{22}{7}$  且  $\frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{m}{n}$ , 其中  $\frac{m}{n}$  为最简分数, 则  $m+n =$ \_\_\_\_\_.

解: 注意到  $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ ,  $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$  且  $1 = \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}$ .  
由  $\frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{22}{7}$  可得  $\frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} = \frac{22}{7}$ , 即  $15 \cos \frac{x}{2} = 29 \sin \frac{x}{2}$ . 于是

$$\frac{m}{n} = \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{1+2\cos^2 \frac{x}{2}-1}{2\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{29}{15}.$$

从而  $m+n = 29+15 = 44$ .

6. 记  $[x]$  为不超过实数  $x$  的最大整数. 若  $A = [\frac{7}{8}] + [\frac{7^2}{8}] + \cdots + [\frac{7^{2019}}{8}] + [\frac{7^{2020}}{8}]$ , 则  $A$  除以 50 的余数为 \_\_\_\_\_.

**解:** 注意到  $\frac{7^{2k-1}}{8}, \frac{7^{2k}}{8}$  均不是整数. 按定义  $7^{2k-1} - 2 = (\frac{7^{2k-1}}{8} - 1) + (\frac{7^{2k}}{8} - 1) < [\frac{7^{2k-1}}{8}] + [\frac{7^{2k}}{8}] < \frac{7^{2k-1}}{8} + \frac{7^{2k}}{8} = 7^{2k-1}$ , 所以对任意正整数  $k$  均有

$$\begin{aligned} [\frac{7^{2k-1}}{8}] + [\frac{7^{2k}}{8}] &= 7^{2k-1} - 1 = 7 \cdot 7^{2k-2} - 1 \\ &= 7 \cdot (49)^{k-1} - 1 = 7 \cdot (50 - 1)^{k-1} - 1 \\ &\equiv 7 \cdot (-1)^{k-1} - 1 \pmod{50}. \end{aligned}$$

从而  $A \equiv 7 \cdot 1010 \cdot (1 - 1) - 1010 \equiv 40 \pmod{50}$ .

7. 一个  $150 \times 324 \times 375$  的长方体由  $1 \times 1 \times 1$  的单位立方体拼在一起构成的, 则该长方体的一条对角线穿过 \_\_\_\_\_ 个不同的单位立方体.

**解:** 从左到右 151 个互相平行两两距离为 1 的平面与对角线有 151 个交点, 将对角线分为 150 段. 同样, 从上到下, 从前到后的两两距离为 1 的平面又增加一些分点. 除去对角线的一端外, 共有  $150 + 324 + 375 - (150, 324) - (324, 375) - (375, 150) + (150, 324, 375) = 768$  个分点(容斥原理), 将对角线分为 768 段, 每段属于一个单位立方体, 即对角线穿过 768 个单位立方体. (注:  $a, b$  为正整数, 记  $(a, b)$  为  $a$  与  $b$  的最大公约数.)

8. 已知数列:  $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{6}{9}, \frac{8}{9}, \frac{2}{27}, \frac{4}{27}, \dots, \frac{26}{27}, \dots, \frac{2}{3^n}, \frac{4}{3^n}, \dots, \frac{3^n-1}{3^n}, \dots$ , 那么  $\frac{2020}{2187}$  是该数列的第 \_\_\_\_\_ 项.

**解:** 依题意知, 可将已知数列进行分组, 第一组为  $\{\frac{2}{3}\}$ ; 第二组为  $\{\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{6}{9}, \frac{8}{9}\}$ ; 第三组为  $\{\frac{2}{27}, \frac{4}{27}, \dots, \frac{24}{27}, \frac{26}{27}\}$ ;  $\dots$ ; 第  $n$  组为  $\{\frac{2}{3^n}, \frac{4}{3^n}, \dots, \frac{3^n-1}{3^n}\}$ . 又  $2187 = 3^7$ ,  $3^6 < 2020 < 3^7$ , 故分数  $\frac{2020}{2187}$  在数列第 7 组.

下面我们计算数列分组后, 前 6 组共有数列中

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} [(3^1 - 1) + (3^2 - 1) + (3^3 - 1) + (3^4 - 1) + (3^5 - 1) + (3^6 - 1)] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{3(3^6 - 1)}{3 - 1} - 6 \right] = 543 \text{ 项}. \end{aligned}$$

又  $\frac{2020}{2187}$  为数列第 7 组的第 1010 位.

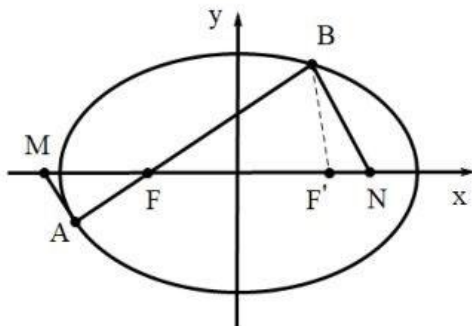
所以分数  $\frac{2020}{2187}$  为数列的第  $543 + 1010$  位, 即 1553 位.

(本大题共3小题, 其中第1题16分, 第2, 3题各20分, 共56分.)

| 得分 | 评卷人 |
|----|-----|
|    |     |

1. 设  $F$  是椭圆  $E: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$  的左焦点, 过点  $F$  斜率为正的直线  $l$  与  $E$  相交于  $A, B$  两点, 过点  $A, B$  分别作直线  $AM$  和  $BN$  满足  $AM \perp l, BN \perp l$ , 且直线  $AM, BN$  分别与  $x$  轴相交于  $M$  和  $N$ . 试求  $|MN|$  的最小值.

解:



设过椭圆  $E$  的左焦点  $F$  的直线  $l$  的倾斜角为  $\alpha$ , 依题意知  $\frac{\pi}{2} > \alpha > 0$ .

如图, 设  $F'$  为椭圆  $E$  的右焦点, 在  $Rt\triangle MAF$  中  $\cos \angle MFA = \frac{|AF|}{|MF|}$ , 所以有  $|MF| = \frac{|AF|}{\cos \angle MFA}$ . 在  $Rt\triangle NBF$  中, 同理有  $|NF| = \frac{|BF|}{\cos \angle NFB}$ , 所以有

$$|MN| = |MF| + |NF| = \frac{|AF|}{\cos \angle MFA} + \frac{|BF|}{\cos \angle NFB} = \frac{|AB|}{\cos \alpha}. \quad (4)$$

连结  $BF'$ , 在  $\triangle FBF'$  中, 记  $|BF| = x$ , 则  $|BF'| = 2\sqrt{3} - x$ .

由余弦定理知  $|BF'|^2 = |BF|^2 + |FF'|^2 - 2|BF||FF'| \cos \alpha$ , 即  $(2\sqrt{3} - x)^2 = x^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2x \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos \alpha$ . 所以有  $x = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2} \cos \alpha}$ , 即

$$|BF| = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2} \cos \alpha}. \quad (5)$$

同理有

$$|AF| = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} \cos \alpha}. \quad (6)$$

由 (5) (6) 知  $|AB| = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2} \cos \alpha} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} \cos \alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{3 - 2 \cos^2 \alpha}$ . 由 (4) 知  $|MN| = \frac{2\sqrt{3}}{(3 - 2 \cos^2 \alpha) \cos \alpha}$ .

令  $f(\alpha) = (3 - 2 \cos^2 \alpha)^2 4 \cos^2 \alpha$ , 则  $f(\alpha) = (3 - 2 \cos^2 \alpha)(3 - 2 \cos^2 \alpha) 4 \cos^2 \alpha$ . 根据均值不等式知  $\frac{(3 - 2 \cos^2 \alpha) + (3 - 2 \cos^2 \alpha) + 4 \cos^2 \alpha}{3} \geq \sqrt[3]{(3 - 2 \cos^2 \alpha)^2 4 \cos^2 \alpha}$ . 所以  $(3 - 2 \cos^2 \alpha)^2 4 \cos^2 \alpha \leq 8$  且等号成立当且仅当  $3 - 2 \cos^2 \alpha = 4 \cos^2 \alpha$ , 即  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ . 所以当且仅当  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  时,  $(f(\alpha))_{\max} = 4$ . 从而当且仅当  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  时  $|MN|_{\min} = \sqrt{6}$ .

2. 设  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  是正整数, 且  $a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_n > 1$  并满足

$$\left(1 - \frac{1}{a_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{a_2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{a_0}\right).$$

试求出  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$  所有可能的解.

解: 由题意知, 对  $0 \leq i \leq n$  均有  $a_i \geq 2$ . 于是有

$$2 > 2\left(1 - \frac{1}{a_0}\right) = \left(1 - \frac{1}{a_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{a_2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) > \frac{n}{2}$$

可得  $n < 4$ . 由于  $n$  是正整数, 故  $n \in \{1, 2, 3\}$ .

(i) 当  $n = 1$  时, 我们有  $\frac{2}{a_0} = 1 + \frac{1}{a_1}$ , 解得  $2a_1 = a_0a_1 + a_0$ . 注意到  $a_1 > 1$ . 从而  $2a_1 = a_0a_1 + a_0 > 2a_0$ , 即  $a_1 > a_0$ , 这与  $a_0 > a_1$  矛盾.

(ii) 当  $n = 2$  时, 我们有  $\frac{2}{a_0} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$ . 由于  $a_0 > a_1 > a_2 > 1$ , 故  $\frac{1}{a_0} < \frac{1}{a_1}$  且  $\frac{1}{a_0} < \frac{1}{a_2}$ . 从而  $\frac{2}{a_0} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$  是不可能的, 故  $n = 2$  也不成立.

(iii) 当  $n = 3$  时, 我们有  $1 + \frac{2}{a_0} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}$ , 则必定有  $a_3 = 2$ , 否则等式右边至多为  $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < 1$ . 同理  $a_2 = 3$ , 不然等式右边至多为  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < 1$ . 因此我们有  $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{6} + \frac{2}{a_0} > \frac{1}{6}$ , 从而  $3 < a_1 < 6$ . 当  $a_1 = 4$  时  $a_0 = 24$ ; 当  $a_1 = 5$  时  $a_0 = 60$ .

综上所述,  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$  所有可能的解为  $(24, 4, 3, 2)$  或  $(60, 5, 3, 2)$ .

| 分 | 评卷人 |
|---|-----|
|   |     |

3. 给定正实数  $0 < a < b$ , 设  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [a, b]$ . 试求

$$\frac{\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \frac{x_3^2}{x_4} + \frac{x_4^2}{x_1}}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \text{ 的最小值与最大值.}$$

解:(i) 因为  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [a, b]$  且  $0 < a < b$ , 所以有

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{x_2} + x_2 \geq 2\sqrt{\frac{x_1^2}{x_2} \cdot x_2} = 2x_1 \\ \frac{x_2^2}{x_3} + x_3 \geq 2\sqrt{\frac{x_2^2}{x_3} \cdot x_3} = 2x_2 \\ \frac{x_3^2}{x_4} + x_4 \geq 2\sqrt{\frac{x_3^2}{x_4} \cdot x_4} = 2x_3 \\ \frac{x_4^2}{x_1} + x_1 \geq 2\sqrt{\frac{x_4^2}{x_1} \cdot x_1} = 2x_4 \end{cases}.$$

从而有

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \frac{x_3^2}{x_4} + \frac{x_4^2}{x_1} \geq x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

并且等号成立当且仅当  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ . 于是当  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$  时  $\frac{\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \frac{x_3^2}{x_4} + \frac{x_4^2}{x_1}}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}$  取得最小值 1.

(ii) 因为  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [a, b]$  且  $0 < a < b$ , 所以  $\frac{x_i}{x_{i+1}} \in [\frac{a}{b}, \frac{b}{a}]$ , 其中  $x_5 = x_1$ .

注意到  $\sqrt{\frac{x_i^2}{x_{i+1}}} = \frac{x_i}{\sqrt{x_{i+1}}}$ . 于是有  $\frac{a}{b} \leq \frac{\sqrt{x_i^2}}{\sqrt{x_{i+1}}} \leq \frac{b}{a}$ . 从而

$$\left(\sqrt{\frac{x_i^2}{x_{i+1}}} - \frac{a}{b}\sqrt{x_{i+1}}\right)\left(\sqrt{\frac{x_i^2}{x_{i+1}}} - \frac{b}{a}\sqrt{x_{i+1}}\right) \leq 0$$

即  $\frac{x_i^2}{x_{i+1}} - (\frac{a}{b} + \frac{b}{a})x_i + x_{i+1} \leq 0$ . 所以, 对所有  $1 \leq i \leq 4$  均有

$$\frac{x_i^2}{x_{i+1}} \leq (\frac{a}{b} + \frac{b}{a})x_i - x_{i+1}$$

其中  $x_5 = x_1$ . 从而有

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \frac{x_3^2}{x_4} + \frac{x_4^2}{x_1} \leq (\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 1)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4).$$

于是

$$\frac{\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \frac{x_3^2}{x_4} + \frac{x_4^2}{x_1}}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \leq \frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 1$$

并且等号成立当且仅当  $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = a, x_4 = b$  或  $x_1 = b, x_2 = a, x_3 = b, x_4 = a$ . 所以  $\frac{\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \frac{x_3^2}{x_4} + \frac{x_4^2}{x_1}}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}$  的最大值为  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 1$ .

综上所述,  $\frac{\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \frac{x_3^2}{x_4} + \frac{x_4^2}{x_1}}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}$  的最小值和最大值分别为 1 和  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 1$ .

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注