贵阳市 2023 年高三适应性考试（二）

文科数学参考答案

2023 年 5 月

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	D	C	B	C	C	C	A	B	D	D

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．$\frac{1}{2}$　14．$\frac{1}{27}$　15．8π　16．①②③

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（1）由已知及正弦定理得 $\sin A\cos C-\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin B+\sqrt{3}\sin C=0$

因为 $\sin B=\sin(A+C)$，$\sin C\neq 0$

整理有 $\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

又因为 $A\neq\frac{\pi}{2}$

所以 $A=\frac{\pi}{6}$

（2）（方法一）由（1）及余弦定理得 $\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-\sqrt{3}bc & ① \\ b^2=a^2+ac & ② \end{cases}$

联立①②得 $c-\sqrt{3}b+a=0$

由正弦定理得 $\sin C-\sqrt{3}\sin B+\frac{1}{2}=0$，$\sin\left(\frac{5\pi}{6}-B\right)-\sqrt{3}\sin B+\frac{1}{2}=0$

整理得 $\sin\left(B-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，$B=\frac{\pi}{3}$

所以 $A+B=\frac{\pi}{2}$

即 $\triangle ABC$ 是直角三角形

（方法二）

因为 $b^2-a^2=ac$

又因为 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{a+c}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

得 $a+c=\sqrt{3}b$

所以$b^2=a^2+ac=a\left(a+c\right)$

得$b=\sqrt{3}a$

又由$2a^2=ac$得$c=2a$

所以$c^2=a^2+b^2$

即$\triangle ABC$是直角三角形

18．解：（1）三个学习群人数比例为$24000:24000:36000=2:2:3$

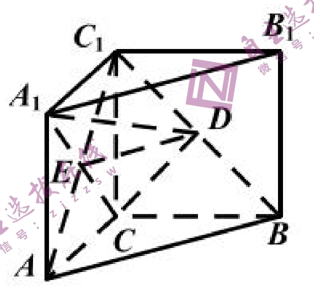
因此，应从 A、B、C 三个学习群分别匹配 2，2，3 人。

（2）（ⅰ）所有可能的结果为：(m_1,m_2)，(m_1,m_3)，(m_1,m_4)，(m_1,m_5)，(m_1,m_6)，(m_1,m_7)，(m_2,m_3)，(m_2,m_4)，(m_2,m_5)，(m_2,m_6)，(m_2,m_7)，(m_3,m_4)，(m_3,m_5)，(m_3,m_6)，(m_3,m_7)，(m_4,m_5)，(m_4,m_6)，(m_4,m_7)，(m_5,m_6)，(m_5,m_7)，(m_6,m_7)共 21 种。

（ⅱ）“抽取的 2 名学员不是来自同一个学习群”的情况有 16 种，所以其概率$P\left(M\right)=\dfrac{16}{21}$

19．解：（1）$\because \lambda=\dfrac{1}{2}$，$\therefore D$为线段$BC_1$的中点，连结$AC_1$，且$AC_1\cap A_1C=E$，又连结$DE$，

易知E是线段AC_1的中点，



于是，DE是$\triangle C_1AB$的中位线，即$DE// AB$，

且$DE\subset$平面A_1CD，$AB\not\subset$平面A_1CD，

综上，当$\lambda=\dfrac{1}{2}$时，$AB//$平面A_1CD．

（2）（法一）$\because$在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle ACB=90^\circ$，得$A_1C_1\perp$平面BCC_1B_1，

$\therefore$平面$A_1C_1D\perp$平面BCC_1B_1，

又$\because$平面$A_1CD\perp$平面A_1C_1D，且平面$BCC_1B_1\cap$平面$A_1CD=CD$，

$\therefore CD\perp$平面A_1C_1D，

$\therefore CD \perp C_1B$，即 D 为 BC_1 的中点，且 D 到平面 A_1C_1C 的距离为 $h=\frac{1}{2}BC=1$，

$\therefore V_{C-AC_1D}=V_{D-A_1C_1C}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}A_1C_1\times CC_1\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times2\times1=\frac{4}{3}$

（法二）过 C 作 $CF\perp A_1D$ 交 A_1D 于 F，且点 F 异于点 D，

$\because$平面 $A_1CD\perp$平面 A_1C_1D，

$\therefore CF\perp$平面 A_1C_1D，

又$\because A_1C_1\subset$平面 A_1C_1D，$\therefore CF\perp A_1C_1$，

又由 $A_1C_1\perp$平面 BCC_1B_1 得 $A_1C_1\perp CD$，且 $CD\cap CF=C$，

$\therefore A_1C_1\perp$平面 CDF，即 $A_1C_1\perp$平面 A_1CD，

$\therefore A_1C_1\perp A_1C$，（与$\triangle A_1C_1C$ 中 $\angle A_1C_1C=90^\circ$ 矛盾）

$\therefore$点 F 与点 D 重合，即当平面 $A_1CD\perp$平面 A_1C_1D 时，$CD\perp$平面 A_1C_1D，

$\therefore CD\perp C_1B$，即 D 为 BC_1 的中点，且 D 到平面 A_1C_1C 的距离为 $h=\frac{1}{2}BC=1$，

$\therefore V_{C-A_1C_1D}=V_{D-A_1C_1C_1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}A_1C_1\times CC_1\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times2\times1=\frac{4}{3}$

20．解：（1）$\because$椭圆 $C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与椭圆 $C_2:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的离心率相等，

$\therefore a^2=2b^2$，又由 $a^2=b^2+\sqrt{2}^2$，$\therefore a^2=4$，$b^2=2$，

故，C_1 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

（2）设 $T(t,0)$，$P(4,p)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则直线 AB 方程为 $x=my+t$，即有 $mp=4-t$，

由 $\frac{PA}{PB}=\frac{AT}{TB}$，可得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{TB}-\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AT}=0$，

于是有，$(x_1-4)(x_2-t)+(y_1-p)(y_2-0)+(x_2-4)(x_1-t)+(y_2-p)(y_1-0)=0$

化简得：$2x_1x_2+2y_1y_2-(t+4)(x_1+x_2)-p(y_1+y_2)+8t=0$，

变形得：$(2m^2+2)y_1y_2+(mt-4m-p)(y_1+y_2)=0$（*）

由$\begin{cases}x=my+t\\x^2+2y^2=4\end{cases}\Rightarrow\left(m^2+2\right)y^2+2mty+\left(t^2-4\right)=0$

当$\Delta=4m^2t^2-4\left(m^2+2\right)\left(t^2-4\right)>0$时，$\begin{cases}y_1+y_2=-\dfrac{2mt}{m^2+2}\\y_1y_2=\dfrac{t^2-4}{m^2+2}\end{cases}$，

将上式与 $mp=4-t$ 共同代入（*），化简得：$(t-1)\left(m^2+1\right)=0$，即 $t=1$，且此时$\Delta>0$成立，

故存在 x 轴上定点$T(1,0)$，使得$\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{AT}{TB}$.

21．解：（1）设切点$M\left(x_0,x_0e^{x_0}\right)$，则由$f(x)=xe^x$，可得$f'(x)=(x+1)e^x$，

$\because f'(x_0)=k_{PM}$，$\therefore(x_0+1)e^{x_0}=\dfrac{x_0e^{x_0}-0}{x_0-t}$，化简得：$x_0^2-tx_0-t=0$，

依题意$\Delta=t^2+4t=0$，解得 $t=0$ 或 $t=-4$，

综上，$t=0$ 或 $t=-4$ 时，过点 P 作曲线$f(x)=xe^x$的切线有且仅有一条．

（2）依题意，由$x\in(0,+\infty)$，所以，$f(x)\geq g(x)a\leq e^x-\dfrac{\ln x+1}{x}$

设$h(x)=e^x-\dfrac{\ln x+1}{x}$，则$h'(x)=\dfrac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$，

设$m(x)=x^2e^x+\ln x$，易知$m'(x)=\left(x^2+2x\right)e^x+\dfrac{1}{x}>0$，即$m(x)$在$x\in(0,+\infty)$单调递增，且$x\to0$时，$m(x)\to-\infty,x\to+\infty$时，$m(x)\to+\infty$，

$\therefore$令$m(x)=x^2e^x+\ln x=0$，则该方程有唯一解x_0，

使得在$x\in(0,x_0)$，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，在$x\in(x_0,+\infty)$，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，即$x=x_0$是函数$h(x)$极小值点，且有$x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，

上式变形得：$x_0e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}\ln\dfrac{1}{x_0}\overset{\text{对数恒等式}}{\Rightarrow}x_0\cdot e^{x_0}=\ln\dfrac{1}{x_0}\cdot e^{\ln\frac{1}{x_0}}\Rightarrow f(x_0)=f\left(\ln\dfrac{1}{x_0}\right)$，（*）

由（1）可知$f'(x)>0$，即$f(x)$在$x\in(0,+\infty)$单调递增，

则（*）可得$x_0=\ln\dfrac{1}{x_0}$，即有$e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$与$\ln x_0=-x_0$

$\therefore h(x)\geq h(x_0)=e^{x_0}-\dfrac{\ln x_0+1}{x_0}=\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{-x_0+1}{x_0}=1$，即 $a\leq 1$，

综上，a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

解法二：

由 $x\in(0,+\infty)$，以及切线不等式：$e^x\geq x+1$，（$x=0$ 时取等号）

$\therefore f(x)=xe^x=e^{\ln x}\cdot e^x=e^{\ln x+x}\geq \ln x+x+1$

$\therefore$ 当 $a\leq 1$ 时，$f(x)\geq \ln x+x+1\geq \ln x+ax+1=g(x)$，即此时，$f(x)\geq g(x)$ 成立

又当 $a>1$ 时，存在 $x_0>0$ 满足 $\ln x_0=-x_0$，即 $x_0e^{x_0}=1$，

此时，$f(x)-g(x)=x_0e^{x_0}-ax_0-\ln x_0-1=(1-a)x_0<0$，不合题意.

综上，a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

22.（1）由 C_1 的参数方程得 $\begin{cases}x^2=t^2+\dfrac{64}{t^2}+16\\ y^2=t^2+\dfrac{64}{t^2}-16\end{cases}$

所以 $x^2-y^2=32$

故 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2\cos 2\theta=32$

（2）$\begin{cases}\theta=\dfrac{\pi}{6}\\ \rho^2\cos 2\theta=32\end{cases}\Rightarrow \rho_A=8$，$\begin{cases}\theta=\dfrac{\pi}{6}\\ \rho=2\sqrt{3}\cos\theta\end{cases}\Rightarrow \rho_B=3$

$\therefore |AB|=|\rho_A-\rho_B|=5$

又 $\because$ 点 $P(4,0)$ 到射线的距离为 2

$\therefore S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}\cdot d\cdot|AB|=5$

23.（1）由柯西不等式得 $\left[a^2+(2b)^2+(2c)^2\right]\cdot(1^2+1^2+1^2)\geq(a+2b+2c)^2$

$\therefore (a+2b+2c)^2\leq 81$

$\therefore a+2b+2c\leq 9$

当且仅当 $a=2b=2c$ 时取等号

即 $a=3$，$b=\dfrac{3}{2}$，$c=\dfrac{3}{2}$ 时取等号

$\therefore a+2b+2c\le 9$

（2）∵$b=c$，$a>0$，$b>0$，$c>0$

由（1）$a+4b\le 9$ 得，$\dfrac{1}{a+4b}\ge\dfrac{1}{9}$

$\therefore\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)(a+4b)=5+\dfrac{4b}{a}+\dfrac{a}{b}\ge 5+2\sqrt{\dfrac{4b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}=9$

当且仅当 $a=2b$ 时，即 $a=3$，$b=\dfrac{3}{2}$ 时取等号，

$\therefore\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{1}{a+4b}\times 9$

即 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge 1$．