2020 年普通高等学校招生全国统一考试数学卷

（上海卷）

一、　填空题（本题共 12 小题，满分 54 分，其中 1-6 题每题 4 分，7-12 题每题 5 分）

1．已知集合 $A=\{1,2,4\}$，$B=\{2,3,4\}$，求 $A\cap B=$_______

【分值】4 分

【答案】$\{2,4\}$

2．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{3n-1}=$________

【分值】4 分

【答案】$\dfrac{1}{3}$

3．已知复数 z 满足 $z=1-2i$（i 为虚数单位），则 $|z|=$_______

【分值】4 分

【答案】$\sqrt{5}$

4．已知行列式 $\begin{vmatrix}1 & a & c\\ 2 & d & b\\ 3 & 0 & 0\end{vmatrix}=6$，则行列式 $\begin{vmatrix}a & c\\ d & b\end{vmatrix}=$_______

【分值】4 分

【答案】2

5．已知 $f(x)=x^3$，则 $f^{-1}(x)=$_______

【分值】4 分

【答案】$x^{\frac{1}{3}}(x\in R)$

6．已知 a、b、1、2 的中位数为 3，平均数为 4，则 ab=________

【分值】4 分

【答案】36

7. 已知 $\begin{cases} x+y\geq 2 \\ y\geq 0 \\ x+2y-3\leq 0 \end{cases}$，则 $z=y-2x$ 的最大值为________

【分值】5 分

【答案】-1

8. 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列，且 $a_1+a_{10}=a_9$，则 $\frac{a_1+a_2+\cdots a_9}{a_{10}}=$______

【分值】5 分

【答案】$\frac{27}{8}$

9. 从 6 人中挑选 4 人去值班，每人值班 1 天，第一天需要 1 人，第二天需要 1 人，第三天需要 2 人，则有________种排法。

【分值】5 分

【答案】180

10. 椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，过右焦点 F 作直线 l 交椭圆于 P、Q 两点，P 在第二象限已知 $Q(x_Q,y_Q),Q'(x'_Q,y'_Q)$ 都在椭圆上，且 $y_Q+y'_Q=0$，$FQ'\perp PQ$，则直线 l 的方程为________

【分值】5 分

【答案】$x+y-1=0$

11、设 $a\in R$，若存在定义域 R 的函数 $f(x)$ 既满足"对于任意 $x_0\in R$，$f(x_0)$ 的值为 x_0^2 或 x_0"又满足"关于 x 的方程 $f(x)=a$ 无实数解"，则 α 的取值范围为___

【分值】5 分

【答案】$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

【解析】题目转换为是否为实数 a，使得存在函数 $f(x)$

满足“对于任意 $x_0\in R$， $f(x_0)$ 的值为 x_0^2 或 x_0”，

又满足“关于的方程 $f(x)=a$ 无实数解”构造函数；

$f(x)=\begin{cases}x,x\neq a\\x^2,x=a\end{cases}$， 则方程 $f(x)=a$

只有 0, 1 两个实数解。

12、已知 $\vec{a_1}$，$\vec{a_2}$，$\vec{b_1}$，$\vec{b_2}$，……，$\vec{b_k}$（$k\in N^*$）是平面内两两互不平等的向量，满足 $|\vec{a_1}-\vec{a_2}|=1$， 且 $|\vec{a_i}-\vec{b_j}|\in\{1,2\}$（其中 $i=1,2$，$j=1,2,\ldots$，k），则 K 的最大值为______

【分值】5 分

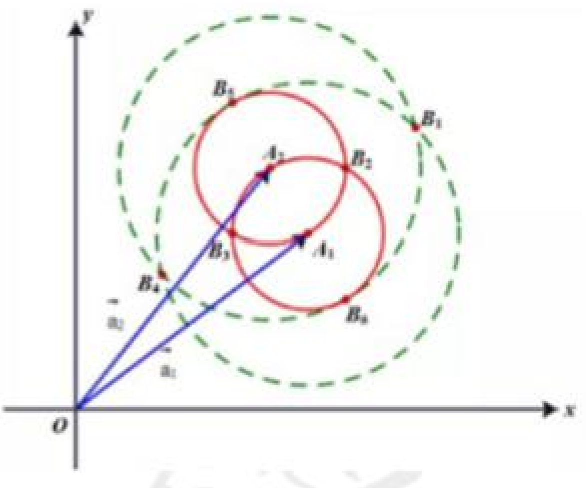
【答案】6

【解析】根据向量减法的运算规律，

$|\vec{a_i}-\vec{b_j}|\in\{1,2\}$ 可转化为以向量 $\vec{a_1}$ 和 $\vec{a_2}$ 终点为圆心，作半径 $r_1=1$ 和 $r_2=2$ 的圆

两圆交点即为满足题意的 $\vec{b}$，由图知，

k 的最大值为 6.



二、选择题（本题共有 4 小题，每题 5 分，共计 20 分）

13、下列不等式恒成立的是（）

A、 $a^2+b^2\leq 2ab$

B、 $a^2+b^2\geq -2ab$

C、 $a+b\geq -2\sqrt{|ab|}$

D、 $a+b\le 2\sqrt{|ab|}$

【分值】5 分

【答案】B

【解析】无

14、已知直线l的解析式为$3x-4y+1=0$，则下列各式是l的参数方程的是（ ）

A、$\begin{cases}x=4+3t\\y=3-4t\end{cases}$

B、$\begin{cases}x=4+3t\\y=3+4t\end{cases}$

C、$\begin{cases}x=1-4t\\y=1+3t\end{cases}$

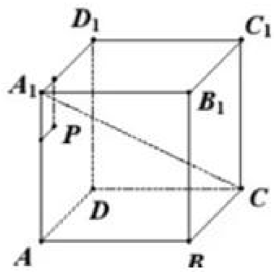
D、$\begin{cases}x=1+4t\\y=1+3t\end{cases}$

【分值】5 分

【答案】D

【解析】无

15、在棱长为 10 的正方体. $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为左侧面 ADD_1A_1 上一点，已知点 P 到 A_1D_1 的距离为 3，点 P 到 AA_1 的距离为 2，则过点 P 且与 A_1C 平行的直线交正方体于 P、Q 两点，则 Q 点所在的平面是（　　）



A. AA_1B_1B

B. BB_1C_1C

C. CC_1D_1D

D. $ABCD$

【分值】5 分

【答案】D

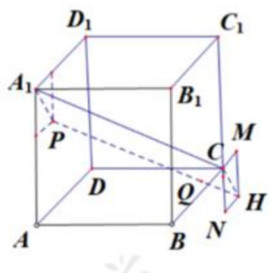
【解析】

延长BC至M点，使得$CM=2$

延长C_1C至N点，使得$CN=3$，

以C、M、N为顶点作矩形，记矩形的另外一个顶点为H，

连接A_1P、PH、HC，则易得四边形A_1PHC为平行四边形，



因为点P在平面ADD_1A_1内，点H在平面BCC_1B_1内，

且点P在平面$ABCD$的上方，点H在平面$ABCD$下方，

所以线段PH必定会在和平面$ABCD$相交，

即点Q在平面$ABCD$内

16.、若存在$a\in R$且$a\neq 0$，对任意的$x\in R$，均有$f(x+a)<f(x)+f(a)$恒成立，则称函数$f(x)$具有性质P，已知：$q_1:f(x)$单调递减，且$f(x)>0$恒成立；q_2：$f(x)$单调递增，存在$x_0<0$使得$f(x_0)=0$，则是$f(x)$具有性质P的充分条件是（）

A、只有q_1

B、只有q_2

C、q_1和q_2

D、q_1和q_2都不是

【分值】5分

【答案】C

【解析】本题要看清楚一个函数具有性质P的条件是，存在$a\in R$且$a\neq 0$，

则对于q_1，$a>0$时，易得函数$f(x)$具有性质P；

对于q_2，只需取$a=x_0$，则$x+a=x+x_0<x$，$f(a)=f(x_0)=0$，

所以$f\left(x+a\right)=f\left(x+x_0\right)<f\left(x\right)=f\left(x\right)+f\left(a\right)$，所以此时函数$f\left(x\right)$具有性质$P$.

三、解答题（本题共 5 小题，共计 76 分）

综合题分割

17、已知边长为 1 的正方形 ABCD，沿 BC 旋转一周得到圆柱体。

（1）求圆柱体的表面积；

（2）正方形 ABCD 绕 BC 逆时针旋转$\dfrac{\pi}{2}$到A_1BCD_1，求AD_1与平面 ABCD 所成的角。

【分值】

【答案】（1）4π；

（2）$\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

综合题分割

18、已知$f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$.

（1）若 f(x)的周期是 4π，求ω，并求此时$f(x)=\dfrac{1}{2}$的解集；

（2）已知$\omega=1$，$g(x)=f^2(x)+\sqrt{3}f(-x)f(\dfrac{\pi}{2}-x)$，$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$，求 g(x)的值域.

【分值】

【答案】（1）$\omega=\dfrac{1}{2}$，$x\in\left\{x|x=\dfrac{\pi}{3}+4k\pi\text{或}x=\dfrac{5\pi}{3}+4k\pi,k\in Z\right\}$；

（2）$\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$

综合题分割

19、已知：$v=\frac{q}{x}$，$x\in(0,80]$，且$v=\begin{cases}100\text{-}135(\frac{1}{3})^{\frac{80}{x}},x\in(0,40)\\-k(x-40)+85,x\in[40,80]\end{cases}$ $(k>0)$，

（1）若 v>95，求 x 的取值范围；

（2）已知 x=80 时，v=50，求 x 为多少时，q 可以取得最大值，并求出该最大值。

【分值】

【答案】（1）$x\in(0,\frac{80}{3})$；

（2）$x=\frac{480}{7}$时，$q_{max}=\frac{28800}{7}$

综合题分割

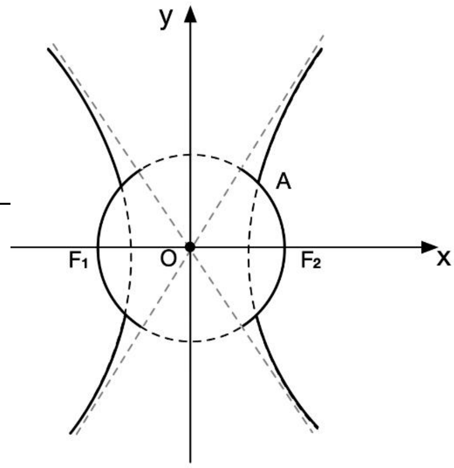
20、双曲线$C_1:\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，圆$C_2:x^2+y^2=4+b^2(b>0)$在第一象限交点为 A，

$A(x_A,y_A)$，曲线$\Gamma\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1,|x|>x_A\\x^2+y^2=4+b^2,|x|>x_A\end{cases}$。

（1）若$x_A=\sqrt{6}$，求 b；

（2）若$b=\sqrt{5}$，C_2与 x 轴交点记为F_1、F_2，P 是曲线Γ上一点，且在第一象限，并满足$|PF_1|=8$，求$\angle F_1PF_2$；

（3）过点$S(0,2+\frac{b^2}{2})$且斜率为$-\frac{b}{2}$的直线l交曲线Γ于 M、N 两点，用 b 的代数式表示$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$，并求出$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$的取值范围。



【分值】

【答案】（1）2；

（2）$\dfrac{11}{16}$；

（3）$(6+2\sqrt{5},+\infty)$；

【解析】（1）若 $x_A=\sqrt{6}$，因为点 A 为曲线 C_1 与曲线 C_2 的交点，

$$\because \begin{cases} \dfrac{{x_A}^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ {x_A}^2+y^2=4+b^2 \end{cases}，解得 \begin{cases} y=\sqrt{2} \\ b=2 \end{cases}，$$

$\therefore b=2$

（2）方法一：由题意易得 F_1、F_2 为曲线的两焦点，

由双曲线定义知：$|PF_2|=|PF_1|-2a$，

$|PF_1|=8, 2a=4$，$\therefore |PF_2|=4$

又 $\because b=\sqrt{5}$，$\therefore |F_1F_2|=6$

在 ΔPF_1F_2 中由余弦定理可得：

$$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2\cdot|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{11}{16}$$

方法二：$\because b=\sqrt{5}$，可得 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1 \\ (x+3)^2+y^2=64 \end{cases}$，解得 $P(4,\sqrt{15})$，

$\therefore \overrightarrow{PF_1}=\left(-7,-\sqrt{15}\right)$，$\overrightarrow{PF_2}=\left(-1,-\sqrt{15}\right)$，

$$\therefore \cos\left\langle \overrightarrow{PF_1},\overrightarrow{PF_2}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}}{|\overrightarrow{PF_1}|\cdot|\overrightarrow{PF_2}|}=\frac{11}{16}$$

（3）设直线 $l: y=-\dfrac{b}{2}x+\dfrac{b^2+4}{2}$

可得原点 0 到直线l的距离 $d=\dfrac{\left|\dfrac{b^2+4}{2}\right|}{\sqrt{1+\dfrac{b^2}{4}}}=\dfrac{|b^2+4|}{\sqrt{b^2+4}}=\sqrt{b^2+4}$

所以直线l是圆的切线，切点为 M,

所以 $k_{OM}=\dfrac{2}{b}$，并设 $l_{OM}:y=\dfrac{2}{b}x$，与圆 $x^2+y^2=4+b^2$ 联立可得 $x^2+\dfrac{4}{b^2}x^2=4+b^2$，

所以得 $x=b,y=2$，即 $M(b,2)$，

注意到直线l与双曲线得斜率为负得渐近线平行，

所以只有当 $y_A\rangle 2$ 时，直线l才能与曲线Γ有两个交点，

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ {x_A}^2+y^2=4+b^2\end{cases}$，得 $y^2{}_A=\dfrac{b^4}{a+b^2}$，

所以有 $4\langle\dfrac{b^4}{4+b^2}$，解得 $b^2\rangle 2+2\sqrt{5}$，或 $b^2\langle 2-2\sqrt{5}$（舍）

又因为 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$ 由 $\overrightarrow{ON}$ 在 $\overrightarrow{OM}$ 上的投影可知： $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=b^2+4$

所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=b^2+4>6+2\sqrt{5}$

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}\in\left(6+2\sqrt{5},+\infty\right)$

21. 有限数列$\{a_n\}$，若满足$|a_1-a_2|\le|a_1-a_3|\le\ldots\le|a_1-a_m|$，$m$ 是项数，则称$\{a_n\}$满足性质p.

（1） 判断数列$3,2,5,1$和$4,3,2,5,1$是否具有性质p，请说明理由.

（2） 若$a_1=1$，公比为q的等比数列，项数为 10，具有性质p，求q的取值范围.

（3） 若 a_n 是 $1,2,\ldots,m$ 的一个排列 $(m\ge 4),b_k=a_{k+1}(k=1,2\ldots m-1),\{a_n\},\{b_n\}$ 都具

有性质 p，求所有满足条件的 $\{a_n\}$.

【分值】

【答案】（1）对于第一个数列有 $|2-3|=1,|5-3|=2,|1-3|=2$，

满足题意，该数列满足性质 p

对于第二个数列有 $|3-4|=1,|2-4|=2,|5-4|=1$ 不满足题意，该数列不满足性质 p.

（2）由题意可得，$\left|q^n-1\right|\geqslant\left|q^{n-1}-1\right|,n\in\{2,3,\ldots,9\}$

两边平方得：$q^{n}-2q^n+1\geqslant q^{2n-2}-2q^{n-1}+1$

整理得：$(q-1)q^{n-1}\left[q^{n-1}(q+1)-2\right]\geqslant 0$

当 $q\geqslant 1$ 时，得 $q^{n-1}(q+1)-2\geqslant 0$， 此时关于 n 恒成立，

所以等价于 $n=2$ 时 $q(q+1)-2\geqslant 0$，所以 $(q+2)(q-1)\geqslant 0$，

所以 $q\leqslant -2$ 或者 $q\geqslant 1$，所以取 $q\geqslant 1$.

当 $0<q\leqslant 1$ 时，得 $q^{n-1}(q+1)-2\leqslant 0$，此时关于 n 恒成立，

所以等价于 $n=2$ 时 $q(q+1)-2\leqslant 0$，所以 $(q+2)(q-1)\leqslant 0$，

所以 $-2\leqslant q\leqslant 1$，所以取 $0<q\leqslant 1$。

当 $-1\leqslant q<0$ 时，得 $q^{n-1}\left[q^{n-1}(q+1)-2\right]\leqslant 0$。

当 n 为奇数的时候，得 $q^{n-1}(q+1)-2\leqslant 0$，很明显成立，

当 n 为偶数的时候，得 $q^{n-1}(q+1)-2\geqslant 0$， 很明显不成立，

故当 $-1\leqslant q<0$ 时，矛盾，舍去。

当 $q<-1$ 时，得 $q^{n-1}\left[q^{n-1}(q+1)-2\right]\leqslant 0$。

当 n 为奇数的时候，得 $q^{n-1}(q+1)-2\leqslant 0$，很明显成立，

当 n 为偶数的时候，要使 $q^{n-1}(q+1)-2\geqslant 0$ 恒成立，

所以等价于 $n=2$ 时 $q(q+1)-2\geqslant 0$，所以 $(q+2)(q-1)\geqslant 0$，

所以 $q\leqslant -2$ 或者 $q\geqslant 1$，所以取 $q\leqslant -2$。

综上可得，$q\in(-\infty,-2]\cup(0,+\infty)$。

（3）设 $a_1=p$ $p\in\{3,4,\cdots,m-3，m-2\}$

因为 $a_1=p$，a_2 可以取 $p-1$ 或者 $p+1$，a_3 可以取 $p-2$ 或者 $p+2$。

如果 a_2 或者 a_3 取了 $p-3$ 或者 $p+3$，将使 $\{a_n\}$ 不满足性质 p

所以，$\{a_n\}$ 的前五项有以下组合：

①$a_1=p$，$a_2=p-1$，$a_3=p+1$，$a_4=p-2$，$a_5=p+2$，

②$a_1=p$，$a_2=p-1$，$a_3=p+1$，$a_4=p+2$，$a_5=p-2$，

③$a_1=p$，$a_2=p+1$，$a_3=p-1$，$a_4=p-2$，$a_5=p+2$，

④$a_1=p$，$a_2=p+1$，$a_3=p-1$，$a_4=p+2$，$a_5=p-2$，

对于①，$b_1=p-1$，$|b_2-b_1|=2$，$|b_3-b_1|=1$，与 $\{b_n\}$ 满足性质 p 矛盾，舍去。

对于②，$b_1=p-1$，$|b_2-b_1|=2$，$|b_3-b_1|=3$，$|b_4-b_1|=2$ 与 $\{b_n\}$ 满足性质 p 矛盾，舍去。

对于③，$b_1=p+1$，$|b_2-b_1|=2$，$|b_3-b_1|=3$，$|b_4-b_1|=1$ 与 $\{b_n\}$ 满足性质 p 矛盾，舍去。

对于④，$b_1=p+1$，$|b_2-b_1|=2$，$|b_3-b_1|=1$，与 $\{b_n\}$ 满足性质 p 矛盾，舍去。

所以 $p\in\{3,4,\cdots,m-3，m-2\}$ 均不能同时使 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都具有性质 p。

当 $p=1$ 时，有数列 $\{a_n\}$：$1,2,3,\cdots,m-1,m$ 满足题意。

当 $p=m$ 时，时有数列 $\{a_n\}$：$m,m-1,\cdots,3,2,1$ 满足题意。

当 p=2 时，有数列 $\{a_n\}$： $2,1,3,\cdots,m-1,m$ 满足题意。

当 p=m 时，有数列 $\{a_n\}$： $m-1,m,m-2,m-3,\cdots,3,2,1$ 满足题意。

故满足题意的数列只有上面四种。