吉安市高三上学期期末教学质量检测 2023.1

数学试题(文科)参考答案

题号	1	2	3	4	5	6
答案	D	B	A	C	D	C
题号	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	A	D	A	D

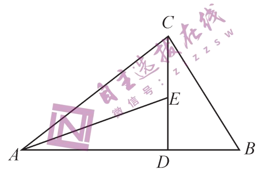
1.【答案】D

【解析】$B=\{x\mid |x-2|<3\}=\{x\mid -1<x<5\}$,则 $A\cup B=\{x\mid -1<x\leqslant 5\}\cup\{7\}$.故选 D.

2.【答案】B

【解析】$z=\dfrac{-2+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=1+2\mathrm{i}$,$\bar{z}=1-2\mathrm{i}$,$\therefore |\bar{z}|=\sqrt{5}$.故选 B.

3.【答案】A



【解析】如图,$\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}$

$=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\lambda}{\lambda+1}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})$

$=\dfrac{\lambda}{2(\lambda+1)}\overrightarrow{CB}-\dfrac{2\lambda+1}{2(\lambda+1)}\overrightarrow{CA}$,

由 $\dfrac{2\lambda+1}{2(\lambda+1)}=\dfrac{5}{6}$,且 $\dfrac{\lambda}{2(\lambda+1)}=\dfrac{1}{3}$,得 $\lambda=2$.故选 A.

4.【答案】C

【解析】甲同学周课外阅读时长的样本众数是 6 和 8,中位数为 $\dfrac{6+8}{2}=7$,选项 A,B 不正确;

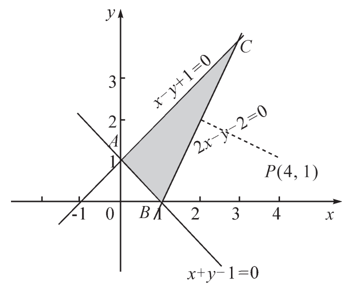
对于 C 选项,乙同学课外体育运动时长的样本平均数为:$\dfrac{5+9+7+6+8+6+10+9}{8}=7.5$,选项 C 正确;

对于 D 选项,乙同学周课外阅读时长大于 8 的概率的估计值 $\dfrac{3}{8}=0.375<0.4$,不正确.故选 C.

5.【答案】D

【解析】设草坪的长、宽分别为 $a,b(b<a)$,步行道的宽度为 m,则 $\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+2m}{a+2m}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,$\therefore$ 草坪不可能为黄金矩形.故选 D.

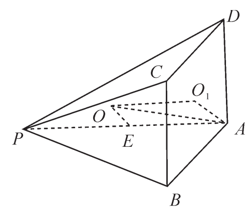
6.【答案】C



【解析】由题意作出可行域,如图阴影部分所示,其中 $A(0,1)$,$B(1,0)$,$C(3,4)$,

$z=(x-4)^2+(y-1)^2$ 的几何意义是点 $P(4,1)$ 到阴影部分距离的平方,显然,P 到直线 $2x-y-2=0$ 的距离最小,$d_{\min}=\dfrac{|2\times 4-1-2|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$,$P$ 到点 A 的距离最大,$d_{\max}=4$,$\therefore 5\leqslant z\leqslant 16$.故选 C.

7.【答案】B



【解析】该几何体的直观图为如图所示的四棱锥 P-$ABCD$,其中 $PA\perp ABCD$,且 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形,$PA=4$,设四棱锥的外接球的球心为 O,半径为 R,

则 $R=OA=\sqrt{O_1A^2+AE^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{6}$,

$\therefore V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi(\sqrt{6})^3=8\sqrt{6}\pi$.故选 B.

8.【答案】C

【解析】由已知,根据正弦定理得,$2b^2=(2c+a)c+(2a+c)a$,则 $a^2+c^2-b^2=-ac$,

$\therefore \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{-ac}{2ac}=-\dfrac{1}{2}$,又 $0<B<\pi$,

$\therefore B=\dfrac{2\pi}{3}$,

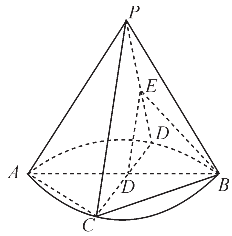
$\because \sin A+\sin C=\sin A+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-A\right)=\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\dfrac{1}{2}\sin A=\dfrac{1}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A$

$=\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)=1$,又 $0<A<\dfrac{\pi}{3}$,$\therefore \dfrac{\pi}{3}<A+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{2\pi}{3}$,$\therefore A+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$,即 $A=\dfrac{\pi}{6}$,

此时,$C=\dfrac{\pi}{6}$,$\therefore \triangle ABC$ 为等腰钝角三角形.故选 C.

9.【答案】A

【解析】如图，延长 CO 交圆 O 于 D，连接 PD，取 PD 中点 E，连接 OE，则 $OE\parallel PC$，则 $\angle EOB$ 为 PC 与 AB 所成的角，



不妨设圆的半径为 1，则 $PC=PD=PB=2$，$OE=\frac{1}{2}PC=1$，

$\because \angle ABC=30^\circ$，$\therefore \angle BAC=60^\circ$，$DB=AC=1$，

在$\triangle PDB$ 中，$\cos\angle DPB=\frac{2^2+2^2-1^2}{2\times 2\times 2}=\frac{7}{8}$，

$\therefore BE^2=2^2+1^2-2\times 2\times 1\times\frac{7}{8}=\frac{3}{2}$，

$\therefore \cos\angle EOB=\frac{1^2+1^2-\frac{3}{2}}{2\times 1\times 1}=\frac{1}{4}$. 故选 A.

10.【答案】D

【解析】$\because k_{AB}=a-2$，$\therefore$直线 AB 关于直线 $y=a$ 的对称直线 l 为 $y=-(a-2)x+a$，即$(a-2)x+y-a=0$，圆 C：$(x+3)^2+y^2=18$ 的圆心 $C(-3,0)$，半径 $r=3\sqrt{2}$，

由 $d=\frac{|-3(a-2)-a|}{\sqrt{(a-2)^2+1}}=3\sqrt{2}$，得 $a=3$，或 $a=9$. 故选 D.

11.【答案】A

【解析】$\because f(1-x)$，$g(x)$均为奇函数，

$\therefore f(1-x)=-f(1+x)$，$g(-x)=-g(x)$，

函数 $f(x)$，$g(x)$的图象分别关于$(1,0)$，$(0,0)$对称，

又 $g(x)=f'(x)$，知 $f(x)$的图象关于 $x=0$ 对称，$g(x)$的图象关于 $x=1$ 对称，

即 $f(-x)=f(x)$，$g(1-x)=g(1+x)$，

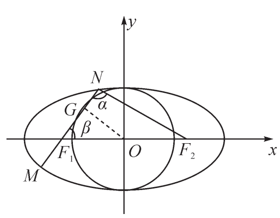
$\therefore f(x)$与 $g(x)$都是周期为 4 的周期函数，

$\therefore f(2\,023)+g(2\,023)=f(506\times 4-1)+g(506\times 4-1)=f(-1)+g(-1)=f(1)-g(1)=-2$.

故选 A.

12.【答案】D

【解析】设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，设过 F_1 作圆 O 的切线切点为 G，$\therefore OG\perp NF_1$，$\therefore |OG|=b$，$|OF_1|=c$，$|GF_1|=\sqrt{c^2-b^2}$，设$\angle F_1NF_2=\alpha$，$\angle F_2F_1N=\beta$，



由 $\cos\angle F_1NF_2=-\frac{3}{5}$，即 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，则 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\sin\beta=\frac{b}{c}$，$\cos\beta=\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{c}$，

在$\triangle F_2F_1N$ 中，$\sin\angle F_1F_2N=\sin(\pi-\alpha-\beta)=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{c^2-b^2}}{c}-\frac{3}{5}\times\frac{b}{c}=\frac{4\sqrt{c^2-b^2}-3b}{5c}$，

由正弦定理得$\frac{2c}{\sin\alpha}=\frac{|NF_2|}{\sin\beta}=\frac{|NF_1|}{\sin\angle F_1F_2N}=\frac{5c}{2}$，

$\therefore\frac{|NF_1|+|NF_2|}{\sin\angle F_1F_2N+\sin\beta}=\frac{5c}{2}$，

即$\frac{2a}{\frac{4\sqrt{c^2-b^2}-3b}{5c}+\frac{b}{c}}=\frac{5c}{2}$，

化简，得$\sqrt{c^2-b^2}=a-\frac{b}{2}$，即$\sqrt{a^2-2b^2}=a-\frac{b}{2}$，

$\therefore 4a=9b$，即$\frac{b}{a}=\frac{4}{9}$，

$\therefore$椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{65}}{9}$. 故选 D.

13.【答案】$\frac{3}{5}$

【解析】记 6 名记者分别为：甲乙 1234，所有可能的情况：甲乙、甲 1、甲 2、甲 3、甲 4，乙 1、乙 2、乙 3、乙 4、12、13、14、23、24、34，共 15 种情况，甲、乙至少有一人被入选有：甲乙、甲 1、甲 2、甲 3、甲 4、乙 1、乙 2、乙 3、乙 4，共 9 种情况，所求概率为$\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.

14.【答案】$-\frac{1}{2}$

【解析】由 $y=f(x)$的图象关于 $x=\frac{\pi}{6}$对称，$\therefore\omega\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore\omega=6k-2(k\in\mathbf{Z})$，又 $\omega>0$，

$\therefore\omega$ 的最小值为 4，此时，$f(x)=\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$，

$T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，$\therefore f\left(\frac{T}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(4\times\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$.

15.【答案】-1

【解析】抛物线 C：$y=2x^2$，即 $x^2=\frac{1}{2}y$，准线方程为 $y=-\frac{1}{8}$，设 $P\left(m,-\frac{1}{8}\right)$，过点 P 的切线方程为 y

$+\frac{1}{8}=k(x-m)$，由 $\begin{cases} y+\frac{1}{8}=k(x-m), \\ y=2x^2, \end{cases}$ 得 $2x^2-$

$kx+km+\frac{1}{8}=0$，

由 $\Delta=k^2-4\times2\left(km+\frac{1}{8}\right)=0$，得 $k^2-8mk-1$

$=0$，

依题意，k_{PA}，k_{PB} 为上述方程的两根，则 $k_{PA}\cdot k_{PB}=$

-1.

16.【答案】$(-\infty,2)$

【解析】由题意，$f(x)=|e^{x-1}-1|=\begin{cases}1-e^{x-1},x<1,\\ e^{x-1}-1,x\geqslant1,\end{cases}$ 则 $f'(x)=\begin{cases}-e^{x-1},x<1,\\ e^{x-1},x\geqslant1.\end{cases}$

不妨设 $x_1<x_2$，点 $A(x_1,1-e^{x_1-1})$ 和点 $B(x_2,e^{x_2-1}-1)$，两切线的斜率分别为 $-e^{x_1-1}$，e^{x_2-1}，

$\therefore -e^{x_1-1}\cdot e^{x_2-1}=-1$，$\therefore x_1+x_2=2$，

$\therefore f(a)<f(x_1+x_2)$ 等价于 $|e^{a-1}-1|<e-1$，等价于 $\begin{cases}a<1,\\ 1-e^{a-1}<e-1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a\geqslant1,\\ e^{a-1}-1<e-1,\end{cases}$

解得 $a<1$，或 $1\leqslant a<2$. 故 a 的取值范围是 $(-\infty,2)$.

17.【解析】(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $b_1=1$，$b_2=1+d$，$b_3=1+4d$，

由 $b_2^2=b_1b_3$ 得，$(1+d)^2=1\times(1+4d)$，$\therefore d=2$，或 $d=0$，…………………………………………… 3 分

当 $d=2$ 时，$a_n=1+(n-2)\times2=2n-3$，$b_n=1\times3^{n-1}=3^{n-1}$；…………………………………… 5 分

当 $d=0$ 时，$a_n=1$，$b_n=1$. ………………………… 7 分

(2)若 $b_3\neq a_3$，$d\neq0$，则 $a_n=2n-3$，又 $b_n=3^{n-1}$，

$\therefore a_n+b_n=2n-3+3^{n-1}$，…………………… 9 分

$\therefore S_n=\frac{n(-1+2n-3)}{2}+\frac{1\times(1-3^n)}{1-3}=n^2-2n+\frac{3^n-1}{2}$. …………………………………………… 12 分

18.【解析】(1)由 $a=5b$，且 $\frac{b}{10}=0.4$，得 $a=20$，$b=4$，

$\therefore$ 从 100 人随机抽取一人"满意"的概率为 $\frac{13+20+27+16+4}{100}=80\%$，

以频率估计概率，从全国玩抖音的市民中随机抽取一人是"满意"的概率为 80%. ……………… 6 分

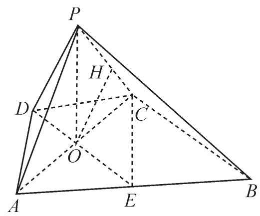
(2)2×2 列联表

	年龄低于 50 岁的人数	年龄不低于 50 岁的人数	合计
满意	60	20	80
不满意	10	10	20
合计	70	30	100

K^2 的观测值 $k=\frac{100\times(60\times10-10\times20)^2}{80\times20\times70\times30}\approx4.762>3.841$，

$\therefore$ 有 95% 的把握认为年龄低于 50 岁的人和年龄不低于 50 岁的人对服务态度有差异. …… 12 分

19.【解析】(1)取 AB 的中点为 E，连接 CE，可知四边形 $ADCE$ 是平行四边形，$\therefore CE=\frac{1}{2}AB$，$\therefore$ 点 C 在以 AB 为直径的圆上，



$\therefore AC\perp BC$，

又 $BC\perp PA$，$PA\cap AC=A$，且 PA，$AC\subset$ 平面 PAC，$\therefore BC\perp$ 平面 PAC；又 $BC\subset$ 平面 PBC，$\therefore$ 平面 $PBC\perp$ 平面 PAC. ………………………… 6 分

(2)$\because BC\perp$ 平面 PAC，$PC\subset$ 平面 PAC，$\therefore BC\perp PC$，由 $PB=2\sqrt{2}$，$BC=PC$，得 $BC=2$，$AC=2\sqrt{3}$，

$\because BC\perp$ 平面 PAC，又 $BC\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore$ 平面 $ABCD\perp$ 平面 PAC，

连接 DE 交 AC 于点 O，则 O 为 AC 的中点，连接 PO，则 $PO\perp AC$，$PO=1$. $\because$ 平面 $ABCD\perp$ 平面 PAC，平面 $ABCD\cap$ 平面 $PAC=AC$，$\therefore PO\perp$ 平面 $ABCD$，

设点 D 到平面 PBC 的距离为 d，

由 $V_{D\text{-}PBC}=V_{P\text{-}DBC}$ 得，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\times1$，$\therefore d=\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………………… 12 分

(另解：由题意可知，$DE/\!/BC$，$\therefore$ 点 O 到平面 PBC 的距离等于点 D 到平面 PBC 的距离，$\because$ 平面 $PBC\perp$ 平面 PAC，平面 $PBC\cap$ 平面 $PAC=PC$，作 $OH\perp PC$，则 $OH\perp$ 平面 PBC，OH 即为 O 到平面 PBC 的距离，则由 $\frac{1}{2}\times2\times OH=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1$，得 $OH=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即点 D 到平面 PBC 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.)

20.【解析】(1)当 $a=1$ 时，$g(x)=f(x)-3\ln x+\frac{1}{2}x^2-\sin x=2x-\sin x$，

$g'(x)=2-\cos x$，$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi-1$，

曲线 $g(x)$在 $x=\frac{\pi}{2}$处的切线方程为 $y-(\pi-1)=2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$,即 $2x-y-1=0$. ………………… 4 分

(2)$f'(x)=\frac{3a}{x}-x-(a-3)=-\frac{x^2+(a-3)x-3a}{x}$

$=-\frac{(x-3)(x+a)}{x}$,

①当 $a\geq 0$ 时,当 $0<x<3$ 时,$f'(x)>0$,当 $x>3$ 时,$f'(x)<0$,∴ $f(x)$在$(0,3)$单调递增,在$(3,+\infty)$单调递减;

②当 $-3<a<0$ 时,由 $f'(x)<0$,得 $0<x<-a$,或 $x>3$;由 $f'(x)>0$,得 $-a<x<3$,

∴ $f(x)$在$(0,-a)$,$(3,+\infty)$单调递减,在$(-a,3)$单调递增;

③当 $a=-3$ 时,$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立,∴ $f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减;

④当 $a<-3$ 时,由 $f'(x)<0$,得 $0<x<3$,或 $x>-a$;由 $f'(x)>0$,得 $3<x<-a$,

∴ $f(x)$在$(0,3)$,$(-a,+\infty)$单调递减,在$(3,-a)$单调递增. ………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)设双曲线 C 的方程为$\frac{x^2}{2}-y^2=\lambda$,将点 $P(2\sqrt{2},1)$的坐标代入得$\frac{8}{2}-1=\lambda$,

∴ $\lambda=3$,∴双曲线 C:$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$. …………… 4 分

(2)显然直线 MN 的斜率存在,设直线 MN 的方程为 $y=kx+m$,由$\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$消去 y,

得$(1-2k^2)x^2-4kmx-2(m^2+3)=0$,

由 $\Delta=(-4km)^2+4\times2(1-2k^2)(m^2+3)=0$,得 $m^2=6k^2-3$,① ………………………………… 6 分

∴ $x_N=\frac{4km}{2(1-2k^2)}=\frac{2km}{-\frac{m^2}{3}}=-\frac{6k}{m}$,

$y_N=kx+m=-\frac{6k^2}{m}+m=\frac{m^2-6k^2}{m}=-\frac{3}{m}$,

即切点 N 的坐标为$\left(-\frac{6k}{m},-\frac{3}{m}\right)$, ………… 8 分

以 MN 为直径的圆恒过点 F_2,则$\angle MF_2N=90°$,

又 M 的坐标为$(t,tk+m)$,$F_2(3,0)$,

$\overrightarrow{F_2N}=\left(-\frac{6k}{m}-3,-\frac{3}{m}\right)$,$\overrightarrow{F_2M}=(t-3,tk+m)$,

∴ $\overrightarrow{F_2M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=\left(-\frac{6k}{m}-3,-\frac{3}{m}\right)\cdot(t-3,tk+m)$

$=\left(-\frac{6k}{m}-3\right)\times(t-3)-\frac{3}{m}(tk+m)=0$,

化简,得$(t-2)(3k+m)=0$.

上式对满足①式任意的 k,m 成立,则 $t=2$.

故存在直线 $x=2$ 满足题设条件. ………… 12 分

22.【解析】(1)消去参数 t 得到直线 l 的普通方程为 $y=\sqrt{3}x$,极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{3}$或 $\theta=\frac{4\pi}{3}$.

$\left(\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})\text{也正确}\right)$ ……………………… 2 分

由 $\rho=a(1+\cos\theta)$,得 $\rho^2=a\rho+a\rho\cos\theta$,即 $x^2+y^2=a\sqrt{x^2+y^2}+ax$, ………………………… 4 分

化简得心形线的直角坐标方程为$(x^2+y^2-ax)^2=a^2(x^2+y^2)$. …………………………………… 5 分

(2)将(2,0)代入方程 $\rho=a(1+\cos\theta)$,得 $a=1$,

∴ $\rho=1+\cos\theta$. ………………………………… 6 分

由$\begin{cases}\theta=\frac{\pi}{3},\\ \rho=1+\cos\theta,\end{cases}$ 得 $A\left(\frac{3}{2},\frac{\pi}{3}\right)$,

由$\begin{cases}\theta=\frac{4\pi}{3},\\ \rho=1+\cos\theta,\end{cases}$ 得 $B\left(\frac{1}{2},\frac{4\pi}{3}\right)$, …………… 8 分

∴ $S_{S\triangle ABP}=S_{\triangle AOP}+S_{\triangle BOP}=\frac{1}{2}\times2\times\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$. ……………………… 10 分

23.【证明】(1)由柯西不等式有

$(a^2+2b^2)(1^2+1^2+1^2)=(a^2+b^2+b^2)(1^2+1^2+1^2)\geqslant(a+b+b)^2=(a+2b)^2$,

∴ $a+2b\leqslant3\sqrt{2}$,

当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$时,取等号,

∴ $a+2b\leqslant3\sqrt{2}$; ……………………………… 5 分

(2)∵ $0<a+2b\leqslant3\sqrt{2}$,∴ $\frac{1}{a+2b}\geqslant\frac{1}{3\sqrt{2}}$,

∴又$\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)(a+2b)=5+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\geqslant9$,

∴ $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geqslant\frac{9}{a+2b}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$,

当且仅当$\frac{2b}{a}=\frac{2a}{b}$,即 $a=b=\sqrt{2}$时取等号,∴ $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geqslant\frac{3}{2}\sqrt{2}$. …………………………………… 10 分