贵州天之王教育

2023届全国甲卷高端精品押题卷

数学文科参考答案(二)

1.【答案】A

【解析】$B=\{x|-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}\}$,所以 $A\cap B=\{-1,0,1\}$,故选 A.

2.【答案】C

【解析】依题意 $a>0$ 且 $a-1>0$,得 $a>1$,故选 C.

3.【答案】D

【解析】$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,故选 D.

4.【答案】C

【解析】这 8 天里,每天图书借出数的极差为 $130-80=50$,故选项 A 错误;这 8 天里,每天图书借出数的平均数为$\frac{86+108+80+130+103+97+101+121}{8}=103.25$,故选项 B 错误;将这 8 个数据从小到大依次排列:80,86,97,101,103,108,121,130,则中位数为$\frac{101+103}{2}=102$,故选项 C 正确;前 4 天图书借出数的平均数为 101,后 4 天图书借出数的平均数为 105.5,前 4 天图书借出数在平均数附近摆动幅度比后 4 天图书借出数在平均数附近摆动幅度大,所以前 4 天图书借出数的方差大于后 4 天图书借出数的方差,故选项 D 错误,故选 C.

5.【答案】D

【解析】由题意得,$\tan\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\times\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{8}\right)}{1-\tan^2\left(\alpha-\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{4}{1-4}=-\frac{4}{3}$,故选 D.

6.【答案】B

【解析】$a=\sqrt{e}>1$,$1>b=\ln\sqrt{3}>\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}$,$c=e^{-\ln 2}=\frac{1}{2}$,所以 $a>b>c$,故选 B.

7.【答案】B

【解析】该程序框图是求数列$\{(-1)^n\cdot 2n\}$的前 20 项和,所以 $S=2\times(-1+2-3+4-\cdots-19+20)=2\times10=20$,故选 B.

8.【答案】D

【解析】由题意得 $-1<3-2x<1$,得 $1<x<2$,故原不等式的解集为$(1,2)$,故选 D.

9.【答案】C

【解析】设点 P 在 AB 上的射影为 C,则 $PC=h$. 由 A,B 两点的俯角分别为 $45°,60°$,可得 $\angle PAC=45°$,$\angle PBC=60°$,所以$\frac{h}{AC}=\tan 45°=1$,$\frac{h}{BC}=\tan 60°=\sqrt{3}$,所以 $AB=AC+BC=\frac{100(3+\sqrt{3})}{3}$ m,故选 C.

10.【答案】A

【解析】连接 BF,则 $\angle BDF$ 即为异面直线 BD 与 AE 所成角(或补角),在 $\triangle BDF$ 中,$BF=\sqrt{6}$,$BD=2\sqrt{2}$,$DF=\sqrt{3}$,

则 $\cos\angle BDF=\dfrac{8+3-6}{2\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{6}}{24}$,故选 A.

11.【答案】C

【解析】由 $f(x)=0$ 得 $2\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=0$,即 $\sin\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $4x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 或 $4x-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得 $x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{5\pi}{12}$ 或 $x=\dfrac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,由 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,得 $x=\dfrac{5\pi}{12},-\dfrac{\pi}{12},0,-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}$,所以 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上零点的个数为 5,故选 C. 来源：高三答案公众号

12.【答案】A

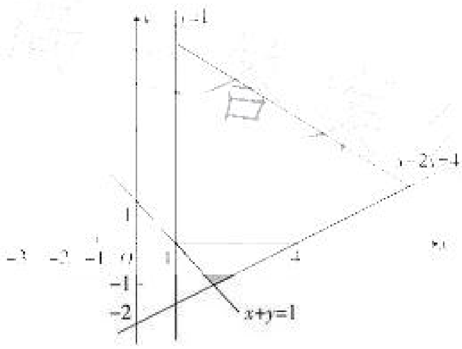
【解析】依题意知 $F(2,0)$,直线 l 的斜率存在且不为 0,设其方程为 $y=k(x-2)$,代入抛物线 C 的方程,消去 y 并整理得 $k^2x^2-4(k^2+2)x+4k^2=0$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $\Delta>0$,$x_1x_2=4$. 因为 $A(1,2\sqrt{2})$,所以 $x_2=4$,$x_1+x_2=5$,所以 $|AB|=x_1+x_2+4=9$,故选 A.

13.【答案】$(x-2)^2+(y-2)^2=4$(或 $(x-2)^2+(y+2)^2=4$,或 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$,或 $(x+2)^2+(y+2)^2=4$)

【解析】依题意,圆心为 $(2,2)$,或 $(2,-2)$,$(-2,2)$,$(-2,-2)$,故所求圆的方程为 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ 或 $(x-2)^2+(y+2)^2=4$,$(x+2)^2+(y-2)^2=4$,$(x+2)^2+(y+2)^2=4$.

14.【答案】1

【解析】作出不等式表示的可行域如图中的阴影部分所示,当直线 $z=x-y$ 与 $x+y=1$ 重合时,z 取得最小值 1.



15.【答案】$\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$

【解析】由题意得,$a\geqslant\dfrac{\ln x}{x}$,设 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$,则 $h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$,令 $h'(x)=0$,得 $x=e$,当 $x\in(0,e)$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增,当 $x\in(e,+\infty)$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$ 单调递减,所以 $h(x)\leqslant h(e)=\dfrac{1}{e}$,则 $a\geqslant\dfrac{1}{e}$.

16.【答案】2

【解析】$F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,设 $B\left(x_0,\dfrac{b}{a}x_0\right)$,因为 $BF_1\perp BF_2$,所以 $\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$,即 $\left(x_0+c,\dfrac{b}{a}x_0\right)\cdot\left(x_0-c,\dfrac{b}{a}x_0\right)=0$,即 $x_0^2-c^2+\dfrac{b^2}{a^2}x_0^2=0$,解得 $x_0=a$,所以 $B(a,b)$,因为 $|F_1A|=|AB|$,所以 $A\left(\dfrac{a-c}{2},\dfrac{b}{2}\right)$,因为点 A 在 $y=-\dfrac{b}{a}x$ 上,所以 $\dfrac{b}{2}=-\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a-c}{2}$,得 $c=2a$,所以离心率 $e=\dfrac{c}{a}=2$.

17. 解:(1) 依题意,$a_1+a_4+a_7=3a_4=-24$,$a_2+a_5+a_8=3a_5=-15$,(2 分)

所以 $a_4=-8, a_5=-5$,(4 分)

设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,则 $d=a_5-a_4=3$,(5 分)

所以 $a_n=a_4+3(n-4)=3n-20$.(6 分)

(2) $T_n=-a_1+a_2-a_3+a_4-\cdots+(-1)^n\cdot a_n$,

当 n 为偶数时,$T_n=(-a_1+a_2)+(-a_3+a_4)+\cdots+(-a_{n-1}+a_n)=d\cdot\frac{n}{2}=\frac{3n}{2}$;(8 分)

当 n 为奇数时,$T_n=-a_1+(a_2-a_3)+(a_4-a_5)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)=-d\cdot\frac{n-1}{2}+17=\frac{37-3n}{2}$.(10 分)

综上,$T_n=\begin{cases}\frac{3n}{2}, n\text{ 为偶数},\\ \frac{37-3n}{2}, n\text{ 为奇数}.\end{cases}$ (12 分)

18. 解:(1)相关系数 $r=\frac{\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})^2\cdot\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{11.1}{\sqrt{10\times12.58}}=\frac{11.1}{\sqrt{125.8}}\approx\frac{11.1}{11.22}\approx0.99$,(4 分)

所以 y 与 t 的线性相关系数 $|r|>0.75$,即 y 与 t 具有较强的线性相关性.(5 分)

(2)由题易知 $\bar{y}=4, \bar{t}=3$,

$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})^2}=\frac{11.1}{10}=1.11$,(7 分)

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=4-1.11\times3=0.67$,(8 分)

所以线性回归方程为 $\hat{y}=0.67+1.11t$,(9 分)

当 $t=6$ 时,$\hat{y}=0.67+1.11\times6=7.33$,(11 分)

所以预测2023年新能源汽车的保有量约为7.33万辆.(12 分)

19.(1)证明:因为 $A_1A\perp$平面 ABC,$BM\subset$平面 ABC,所以 $A_1A\perp BM$.(1 分)

依题意,$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,又 M 为 AC 的中点,所以 $BM\perp AC$,(2 分)

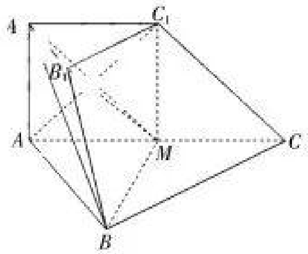
因为 $A_1A\cap AC=A$,A_1A,$AC\subset$平面 A_1ACC_1,

所以 $BM\perp$平面 A_1ACC_1,而 $AC_1\subset$平面 A_1ACC_1,所以 $BM\perp AC_1$.(3 分)

连接 MC_1,易知四边形 A_1C_1MA 为正方形,所以 $AC_1\perp A_1M$,(4 分)

因为 $BM\cap A_1M=M$,

所以 $AC_1\perp$平面 A_1BM.(5 分)



(2)解:连接 B_1M,因为 $AB=BC=2$,$BC\perp AB$,$AC=2A_1A$,所以 $A_1A=\sqrt{2}$,

因为 $BC\perp AB$,$BC\perp A_1A$,$AB\cap A_1A=A$,所以 $BC\perp$平面 A_1B_1BA,

所以点 M 到平面 A_1BB_1 的距离 $d=\frac{1}{2}BC=1$,(7 分)

则 $V_{三棱锥M-A_1BB_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BB_1}\cdot d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{2}\times1=\frac{\sqrt{2}}{6}$.(9 分)

在 $\triangle A_1BM$ 中,$BM=\sqrt{2}$,$A_1M=\sqrt{2}A_1A=2$,且 $BM\perp A_1M$,

所以 $S_{\triangle A_1BM}=\frac{1}{2}\times BM\times A_1M=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2=\sqrt{2}$,(10 分)

设点 B_1 到平面 A_1BM 的距离为 h,则 $V_{三棱锥B_1-A_1BM}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BM}\cdot h=\frac{\sqrt{2}}{3}h$,(11 分)

由 $\frac{\sqrt{2}}{3}h=\frac{\sqrt{2}}{6}$,解得 $h=\frac{1}{2}$. 来源：高三答案公众号

所以点 B_1 到平面 A_1BM 的距离为 $\frac{1}{2}$.(12 分)

20. (1)解:易知点 $P(0,6)$ 不在曲线 $y=f(x)$ 上,设切点为 $M(x_0,y_0)$,

由 $f(x)=x^3+2x^2-x-2$ 得 $f'(x)=3x^2+4x-1$,(1 分)

则切线斜率 $k=f'(x_0)=3x_0^2+4x_0-1$,

又 $k=\frac{y_0-6}{x_0}=\frac{x_0^3+2x_0^2-x_0-8}{x_0}$,所以 $\frac{x_0^3+2x_0^2-x_0-8}{x_0}=3x_0^2+4x_0-1$,(2 分)

整理得 $x_0^3+x_0^2+4=0$,即 $(x_0+2)(x_0^2-x_0+2)=0$,(3 分)

由 $x_0+2=0$ 得 $x_0=-2$,而 $x_0^2-x_0+2=0$ 无实数根,(4 分)

可得切点为 $M(-2,0)$,斜率 $k=3$,

所以切线方程为 $y=3(x+2)$,即 $y=3x+6$.(5 分)

(2)证明:令 $g(x)=f(x)-(kx+6)=x^3+2x^2-(k+1)x-8$,

$g'(x)=3x^2+4x-(k+1)$,令 $g'(x)=0$,则 $\Delta=4^2-12(k+1)=12k+28$.(6 分)

①当 $k\leqslant-\frac{7}{3}$ 时,$\Delta\leqslant0$,则 $g'(x)\geqslant0$ 恒成立,函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

因为 $g(0)=-8<0$,$g(2)=6-2k>0$,

所以函数 $g(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上有唯一零点,则函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在唯一零点.(7 分)

②当 $-\frac{7}{3}<k<3$ 时,$\Delta>0$,方程 $g'(x)=0$ 有两个不等实根,

设为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,易知 $-2<x_1<-\frac{2}{3}<x_2$,(8 分)

由 $g'(x)<0$ 可得 $x_1<x<x_2$,由 $g'(x)>0$ 可得 $x<x_1$ 或 $x>x_2$,

所以函数 $g(x)$ 的单调递减区间为 (x_1,x_2),单调递增区间为 $(-\infty,x_1)$,$(x_2,+\infty)$,

则 $g(x)$ 的极大值 $g(x_1)=x_1^3+2x_1^2-x_1-kx_1-8=x_1^3+2x_1^2-x_1-(3x_1^3+4x_1^2-x_1)-8$

$=-2x_1^3-2x_1^2-8$,(9 分)

令 $t=x_1\in\left(-2,-\frac{2}{3}\right)$,$h(t)=-2t^3-2t^2-8$,则 $h'(t)=-6t^2-4t=-2t(3t+2)<0$,

所以函数 $h(t)$ 在 $\left(-2,-\frac{2}{3}\right)$ 上单调递减,故 $h(t)<h(-2)=0$,即 $g(x_1)<0$,

即 $g(x)$ 的极大值小于 0,(10 分)

因为 $g(0)=-8<0$,且当 $-\frac{7}{3}<k<3$ 时,$g(2)=6-2k>0$,

所以函数 $g(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上有唯一零点,则函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在唯一零点.(11 分)

综上所述,当 $k<3$ 时,曲线 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=kx+6$ 的图象仅有一个交点.(12 分)

21.(1)解:依题意得,$\begin{cases}c=1,\\(a+c)(a-c)=5,(2\text{ 分})\\b^2=a^2-c^2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=\sqrt{6},\\b=\sqrt{5},\end{cases}$

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=1$.(4 分)

(2)证明:依题意,直线 l_1,l_2 的斜率均存在且不为 0,

设直线 l_1 的方程为 $x=my-1(m\neq0)$,则直线 l_2 的方程为 $x=-\frac{1}{m}y-1$,(5 分)

直线 l_1,l_2 均过椭圆 C 的左焦点(椭圆 C 内一点),所以 l_1,l_2 与椭圆 C 必有两个交点.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由 $\begin{cases}x=my-1,\\5x^2+6y^2=30,\end{cases}$ 得 $(5m^2+6)y^2-10my-25=0$,(6 分)

由韦达定理可得 $y_1+y_2=\frac{10m}{5m^2+6}$,则 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)-2=-\frac{12}{5m^2+6}$,(7 分)

所以点 M 的坐标为 $\left(-\frac{6}{5m^2+6},\frac{5m}{5m^2+6}\right)$,同理可得点 $N\left(-\frac{6m^2}{6m^2+5},-\frac{5m}{6m^2+5}\right)$,(8 分)

当 $m\neq\pm1$ 时,直线 MN 的斜率为 $k_{MN}=\dfrac{\frac{5m}{5m^2+6}+\frac{5m}{6m^2+5}}{-\frac{6}{5m^2+6}+\frac{6m^2}{6m^2+5}}=\frac{11m}{6(m^2-1)}(m\neq\pm1)$.

直线 MN 的方程是 $y-\frac{5m}{5m^2+6}=\frac{11m}{6(m^2-1)}\left(x+\frac{6}{5m^2+6}\right)$,(9 分)

令 $y=0$,得 $x=\frac{-30m^2-36}{11(5m^2+6)}=\frac{-6(5m^2+6)}{11(5m^2+6)}=-\frac{6}{11}$,

故直线 MN 与 x 轴交于点 $\left(-\frac{6}{11},0\right)$,(10 分)

当 $m=\pm1$ 时,直线 MN 的方程为 $x=-\frac{6}{11}$,直线 MN 与 x 轴交于点 $\left(-\frac{6}{11},0\right)$,(11 分)

综上知,直线 MN 与 x 轴交于定点 $\left(-\frac{6}{11},0\right)$.(12 分)

22.解:(1)由 $\begin{cases}x=1+\frac{1}{2}t,\\y=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$ 消去 t,得 $\frac{y+1}{x-1}=\sqrt{3}$,

得直线 l 的直角坐标方程为 $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}-1$.(2 分)

将互化公式 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 代入 $\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta+1=0$,

得 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$，即 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$.（5 分）

(2)由(1)得圆心 $C(1,2)$，$r=2$，点 $P(1,-1)$ 在直线 l 上且在圆外，

所以 $||PA|-|PB||$ 为直线 l 被圆 C 截得的弦长，（7 分）

所以圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|\sqrt{3}-2-\sqrt{3}-1|}{2}=\dfrac{3}{2}$，（8 分）

所以 $||PA|-|PB||=|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{7}$.（10 分）

23. 解：(1)由绝对值不等式，

得 $f(x)=|2x-1|+|2x-k|\geq|2x-1-(2x-k)|=|k-1|$，（1 分）

当且仅当 $(2x-1)(2x-k)\leq 0$ 时等号成立.（2 分）

所以 $|k-1|\geq 1$，解得 $k\leq 0$，或 $k\geq 2$，（4 分）

所以实数 k 的取值范围是 $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$.（5 分）

(2)由(1)知当 $k=4$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $|k-1|=3$，（6 分）

从而 $a+4b=3$，（7 分）

所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)(a+4b)=\dfrac{1}{3}\left(5+\dfrac{4b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)\geq\dfrac{1}{3}\left(5+2\sqrt{\dfrac{4b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}\right)=3$，

当且仅当 $a=1$，$b=\dfrac{1}{2}$ 时等号成立，（9 分）

所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为 3.（10 分）

关于我们