

# 高三数学试题

## 注意事项:

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。
3. 试卷命题范围:高考范围。

选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 复数  $z$  满足  $\frac{z}{1+2i} = \frac{2}{1+i}$ , 则它的共轭复数  $\bar{z}$  的虚部为  
A. -1                      B. 1                      C. -i                      D. i
2. 已知集合  $M = \{x | -3 < x \leq 1\}$ ,  $N = \{x | \log_4 |x| \leq \frac{1}{2}\}$ , 则集合  $M \cap N =$   
A.  $[-2, 1]$                       B.  $[-2, 0) \cup (0, 1]$                       C.  $(-3, \frac{1}{2}]$                       D.  $(-3, 0) \cup (0, 1]$
3. 老师排练节目需要 4 个男生和 2 个女生,将这六名学生随机排成一排,2 个女生不相邻的概率为  
A.  $\frac{2}{3}$                       B.  $\frac{3}{4}$                       C.  $\frac{1}{3}$                       D.  $\frac{1}{2}$
4. 已知非零向量  $a, b$  满足  $|a| = 2|b|$ , 且向量  $b$  在向量  $a$  上的投影向量是  $\frac{1}{4}a$ , 则向量  $a$  与  $b$  的夹角是  
A.  $\frac{2\pi}{3}$                       B.  $\frac{\pi}{2}$                       C.  $\frac{\pi}{3}$                       D.  $\frac{\pi}{6}$
5. 已知圆  $C: x^2 + y^2 = 4$ , 从点  $E(-4, 0)$  出发的光线要想不被圆  $C$  挡住直接到达点  $F(3, m)$ , 则实数  $m$  的取值范围为  
A.  $(-\frac{7\sqrt{3}}{3}, \frac{7\sqrt{3}}{3})$                       B.  $(-\infty, -\frac{7\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{7\sqrt{3}}{3}, +\infty)$   
C.  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$                       D.  $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$
6. 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $M$  为正方形  $ABB_1A_1$  内(含边界)一动点, 且满足  $\vec{AM} = \lambda \vec{AB} + (1-\lambda)\vec{AA_1}$ , 则直线  $MC_1$  与平面  $AA_1B$  所成角的正弦值的取值范围是  
A.  $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$                       B.  $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$                       C.  $[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}]$                       D.  $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}]$

7. 已知函数  $f(x)$ 、 $g(x)$  是定义域为  $\mathbf{R}$  的可导函数, 且  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 都有  $f(x) > 0, g(x) > 0$ , 若  $f(x)$ 、 $g(x)$  满足  $\frac{f'(x)}{f(x)} < \frac{g'(x)}{g(x)}$ , 则当  $x_1 < x < x_2$  时下列选项一定成立的是 ( )

- A.  $f(x_2)g(x_1) > f(x_1)g(x_2)$                       B.  $f(x)g(x_1) > f(x_1)g(x)$   
C.  $\frac{f(x_2)-g(x_2)}{f(x_1)-g(x_1)} < \frac{g(x_2)}{g(x_1)}$                       D.  $\frac{f(x_2)}{g(x_2)} < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{g(x_1)+g(x_2)}$

8. 已知实数  $m, n, t$  满足  $m = \lg(2^t + 8^t), n = \log_8(10^t - 2^t)$ , 则 ( )

- A.  $|m-n| \leq |t-n|, |m-t| \leq |t-n|$                       B.  $|m-n| \leq |t-n|, |m-t| \geq |t-n|$   
C.  $|m-n| \geq |t-n|, |m-t| \leq |t-n|$                       D.  $|m-n| \geq |t-n|, |m-t| \geq |t-n|$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合要求, 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知  $f(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 且在  $(0, +\infty)$  上单调递增,  $f(-1) = f(3) = 2$ , 则下列命题中一定正确的是

- A.  $f(-2) > -2$     B.  $f(x)$  有 3 个零点  
C.  $f(2) < -2$     D.  $f(f(5)) > f(f(-\frac{1}{2}))$

10. 在  $\triangle ABC$  中,  $AB=4, AC=3, \cos(C-B) = \frac{3}{4}$ , 则下列结论错误的是

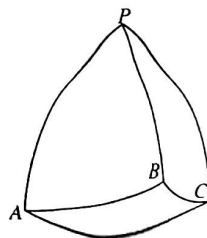
- A.  $AB$  边上的中线长为 2                                      B.  $\triangle ABC$  为锐角三角形  
C.  $\cos B = \frac{4}{5}$     D.  $\triangle ABC$  的周长为 12

11. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 上顶点为  $M$ , 直线  $l: y = mx (m \neq 0)$  与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点,  $\angle F_1AF_2$  的角平分线与  $x$  轴相交于点  $C$ , 与  $y$  轴相交于点  $D(0, n)$ , 则

- A. 四边形  $AF_1BF_2$  的周长为 16                                      B. 直线  $MA, MB$  的斜率之积为  $-\frac{9}{16}$   
C.  $\frac{1}{|AF_1|} + \frac{4}{|BF_1|}$  的最小值为  $\frac{9}{4}$                                       D. 当  $n = -\frac{1}{2}$  时, 点  $A$  的纵坐标为  $\frac{9}{14}$

12. 勒洛三角形也被称为定宽曲线, 勒洛三角形的立体版就是如图所示的立体图形, 它能在两个平行平面间自由转动, 并且始终保持与两平面都接触, 它是以正四面体的四个顶点为球心, 以正四面体的棱长为半径的四个球的公共部分组成的, 因此它能像球一样来回滚动. 这种立体图形称为勒洛四面体, 若图中勒洛四面体的四个顶点分别为  $P, A, B, C$ , 任意两个顶点之间的距离为 1, 则下列说法正确的是

- A. 图中所示勒洛四面体表面上任意两点间距离的最大值为 1  
B. 图中所示勒洛四面体的内切球的表面积为  $\frac{(11-4\sqrt{6})\pi}{2}$   
C. 平面  $ABC$  截此勒洛四面体所得截面的面积为  $\pi - \sqrt{3}$   
D. 图中所示的勒洛四面体的体积是  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

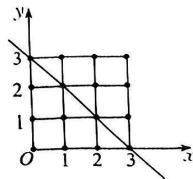


三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 小明统计了最近一段时间某超市冷饮的销售量  $n$ . 根据统计发现  $n$  近似服从正态分布  $N(50, \sigma^2)$ , 且  $P(X \geq 20) = 0.90$ , 已知该超市冷饮的销售量在区间  $[20, 80]$  内的有 80 天, 则可以估计小明一共统计了 \_\_\_\_\_ 天.

14. 已知平面直角坐标系中, 曲线  $C$  上的点到定直线  $l: x=2$  的距离与到定点  $F(-2, 0)$  的距离相等,  $P$  为曲线  $C$  上一点, 过点  $P$  作  $PM \perp l$ , 垂足为  $M$ . 若  $|PF| = |MF|$ , 则  $|OP| =$  \_\_\_\_\_.

15. 数学课上,老师出了一道智力游戏题.如图所示,平面直角坐标系中有一个3乘3方格图(小正方形边长为1),一共有十六个红色的格点,游戏规则是每一步可以改变其中一个点的颜色(只能由红变绿或绿变红),如将其中任何一个点由红色改成绿色,则这个点周围与之相邻的点也要从原来的颜色变成另外一种颜色,比如选择(1,1)变成绿色,则与之相邻的(0,1),(1,0),(1,2),(2,1)四个点也要变成绿色,那么最少需要\_\_\_\_\_步,才能使得位于直线 $y=-x+3$ 上的四个点变成绿色,而其他点都是红色.



16. 已知数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1+3c_2+\dots+3^{n-1}c_n=\frac{n}{2}\cdot 3^n$ ,令 $b_n=c_n+pn$ ,数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $H_n$ ,若 $H_n\leq H_5$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立,则实数 $p$ 的取值范围为\_\_\_\_\_.

四、解答题:本大题共6小题,共70分.解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17. (本小题满分10分)

已知函数 $f(x)=[\sin(\omega x+\varphi)-\sqrt{3}\cos(\omega x+\varphi)]\cos(\omega x+\varphi)+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ( $\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ )为奇函数,且其图象相邻两对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$ .

(1)求 $\omega$ 和 $\varphi$ ;

(2)当 $x\in[-\frac{\pi}{12},\pi]$ 时,记方程 $2\omega f(x+\frac{\varphi}{2})=m$ 的根为 $x_1,x_2,x_3$ ( $x_1<x_2<x_3$ ),求 $m\cdot\frac{x_2+x_3}{x_1-x_3}$ 的范围.

18. (本小题满分12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=4$ ,且 $a_n-a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_{n+1}-3)(a_n-3)$ .

(1)求证:数列 $\{\frac{2}{a_n-3}\}$ 是等差数列;

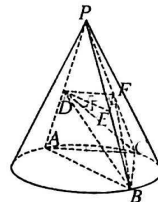
(2)记数列 $b_n=(a_n-3)(a_{n+1}-3)$ ,求数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$ .

19. (本小题满分12分)

如图所示的圆锥中, $P$ 为顶点,在底面圆周上取 $A,B,C$ 三点,使得 $AC=4,BC=2$ ,在母线 $PA$ 上取一点 $D$ ,过 $D$ 作一个平行于底面的平面,分别交 $PB,PC$ 于点 $E,F$ ,且 $EF=1,DE=\sqrt{5}$ .

(1)求证:平面 $ABD\perp$ 平面 $ABC$ ;

(2)已知三棱锥 $F-BCD$ 的体积为2,求平面 $EBD$ 与平面 $BDF$ 夹角的正切值.



20. (本小题满分 12 分)

某公司对新生产出来的 300 辆新能源汽车进行质量检测,每辆汽车要由甲、乙、丙三名质检员各进行一次质量检测,三名质检员中有两名或两名以上检测不合格的将被列为不合格汽车,有且只有一名质检员检测不合格的汽车需要重新由甲、乙两人各进行一次质量检测,重新检测后,如果甲、乙两名质检员中还有一人或两人检测不合格,也会被列为不合格汽车.假设甲、乙、丙三名质检员的检测相互独立,每一次检测不合格的概率为  $p(0 < p < 1)$ .

(1) 求每辆汽车被列为不合格汽车的概率  $q$ ;

(2) 公司对本次质量检测的预算支出是 4 万元,每辆汽车不需要重新检测的费用为 60 元,需要重新检测的前后两轮检测的总费用为 100 元,所有汽车除检测费用外,其他费用估算为 1 万元,若 300 辆汽车全部参与质量检测,实际费用是否会超出预算?

21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = e^{x-1} - ax^2, a \in \mathbf{R}$ .

(1) 若  $f(x)$  的图象在  $x=1$  处的切线与直线  $y = -\frac{1}{3}x + 2$  垂直,求  $a$  的值及切线方程;

(2) 若  $a > 0$ ,函数  $g(x) = f(x) + ax \ln(ax)$  在其定义域上存在零点,求实数  $a$  的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 焦距为 4, 虚轴长为 2.

(1) 求双曲线  $C$  的标准方程;

(2) 直线  $l_1$  与双曲线  $C$  的右支交于  $M, N$  两点,  $M$  位于第一象限,  $M$  关于原点  $O$  的对称点为

$Q$ . 设  $\angle F_1 Q F_2$  的角平分线为  $l_2$ , 且  $l_1 \perp l_2$ , 垂足为  $E$ , 求  $\frac{|ME|}{|NE|}$  的最大值.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

