

湘豫名校联考 2023年8月高三秋季入学摸底考试 数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	A	B	B	D	D	B	BCD	ABD	AC	ABD

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. C 【命题意图】本题考查集合的运算、解一元二次不等式及对数函数的定义域,考查了数学运算的核心素养.

【解析】因为集合 $A = \{x | x^2 - x - 6 < 0\} = (-2, 3)$, $B = \{x | y = \ln(x+1)\} = (-1, +\infty)$, 所以 $\complement_{\mathbb{R}} B = (-\infty, -1]$, 所以 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = (-2, -1]$, 故选 C.

2. D 【命题意图】本题考查复数的乘、除法运算及复数的相关概念,考查了数学运算的核心素养.

【解析】由题可得 $z = \frac{2-i}{1+i} = \frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$, 则 $\bar{z} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$, 所以 \bar{z} 的虚部为 $\frac{3}{2}$, 故选 D.

3. A 【命题意图】本题考查直线与圆的位置关系,考查了数学运算、直观想象的核心素养.

【解析】依题知圆心 $C(1, -1)$, 半径为 3, 则 $\frac{|2\sqrt{2} - (-1) - b|}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (-1)^2}} = 3$, 解得 $b = 8 - 3\sqrt{2}$ 或 $b = -10 - 2\sqrt{2}$, 故选 A.

4. B 【命题意图】本题考查三角函数的定义、正切的和角公式、诱导公式,考查了数学运算的核心素养.

【解析】设 $\tan \beta = t$, 由题可得 $\tan \alpha = \frac{1}{t}$, 所以 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{t} + t}{1 - \frac{1}{t} \cdot t} = 2$, 解得 $t = \frac{1}{2}$, 所以 $\tan(3\pi - \beta) = -\tan \beta = -\frac{1}{2}$, 故选 B.

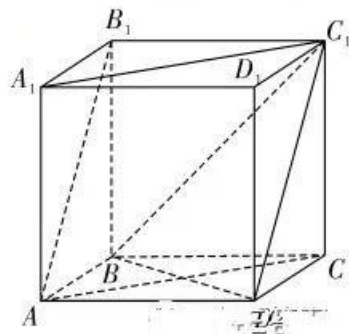
5. B 【命题意图】本题考查向量的几何意义、向量的数量积运算、向量的夹角,考查了数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】由题可得 $\begin{cases} \frac{|a \cdot b|}{|b|} = \sqrt{2}, \\ \frac{|a \cdot b|}{|a|} = 1, \end{cases}$ 所以 $\frac{|a|}{|b|} = \sqrt{2}$. 因为 $(a+b) \perp (2a-3b)$, 所以 $(a+b) \cdot (2a-3b) = 0$, 所以

$2|a|^2 - 3|b|^2 - |a||b|\cos\langle a, b \rangle = 0$, 所以 $2\frac{|a|^2}{|b|^2} - 3 - \frac{|a|}{|b|}\cos\langle a, b \rangle = 0$, 即 $\cos\langle a, b \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\langle a, b \rangle = 45^\circ$, 故选 B.

6. D 【命题意图】本题考查异面直线所成的角、余弦定理,考查了直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】如图,将该几何体补成一个直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 由题易得底面 $ABCD$ 为菱形,且 $\triangle ABC$ 为等边三角形. 连接 DC_1, BD , 易得 $AB_1 \parallel DC_1$, 所以 $\angle BC_1D$ (或其补角) 是异面直线 AB_1 与 BC_1 所成的角. 设 $AB = 1$, 则 $BC_1 = DC_1 = \sqrt{2}$, $BD = 2\sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{3}$, 所以 $\cos \angle BC_1D = \frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2}{2 \times (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{4}$, 故选 D.



7. D 【命题意图】本题考查抛物线的概念、直线与抛物线的位置关系,考查了逻辑推理、数学运算等核心素养.

【解析】因为直线 l 过点 $F(0, \frac{p}{2}), P(1, 0)$, 所以直线 l 的方程为 $y = -\frac{p}{2}(x-1)$. 由 $\begin{cases} y = -\frac{p}{2}(x-1), \\ x^2 = 2py, \end{cases}$ 得 $x^2 +$

$p^2x - p^2 = 0, \Delta > 0$. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = -p^2, x_1x_2 = -p^2$. 因为 $|AB| = \sqrt{1 + \frac{p^2}{4}} |x_2 - x_1| = \sqrt{1 + \frac{p^2}{4}} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{(1 + \frac{p^2}{4})(p^4 + 4p^2)} = \frac{p(p^2 + 4)}{2} = 8$, 整理得 $p^3 + 4p - 16 = (p-2)(p^2 + 2p + 8) = 0$, 解得 $p = 2$, 所以抛物线 C 的准线方程是 $y = -\frac{p}{2} = -1$. 故选 D.

8. B 【命题意图】本题考查函数的图象变换、函数的奇偶性,考查了直观想象、数学建模、数学运算的核心素养.

【解析】因为 $g(x) = f(x-1) - 2 = \begin{cases} 2^{-x}, & x < 0, \\ -2^x, & x > 0, \end{cases}$ 又 $g(x)$ 的定义域关于原点对称, 且 $g(-x) = -g(x)$, 所以 $g(x)$ 是奇函数, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1, 2)$ 对称. 故选 B.

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. BCD 【命题意图】本题考查二项式展开式及二项式系数问题、排列数、组合数的计算, 考查了数学运算的核心素养. 来源: 高三答案公众号

【解析】 $T_3 = C_n^3 \cdot (x^m)^{n-3} \cdot \frac{1}{x} = C_n^3 \cdot x^{m(n-3)-1}$. 由题可得 $\begin{cases} C_n^3 = 15, \\ mn - 1m - 1 = 0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} n = 5, \\ m = 2. \end{cases}$ 所以 $A_3^5 = 30$, A 错误; $C_{27}^{27} = C_1^1 = \frac{A_1^1}{1!} = 1$, B 正确; $(x^2 + \frac{1}{x})^5$ 展开式系数的最大值为 $C_5^3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 20$, C 正确; 令 $x = 1$, 则 $(1 + 1)^5 = 32$, 即 $(x^m + \frac{1}{x})^n$ 展开式的各项系数之和为 64, D 正确. 故选 BCD.

10. ABD 【命题意图】本题考查数列的性质、累乘求通项、数列求和, 考查了逻辑推理、数学运算、数学抽象的核心素养.

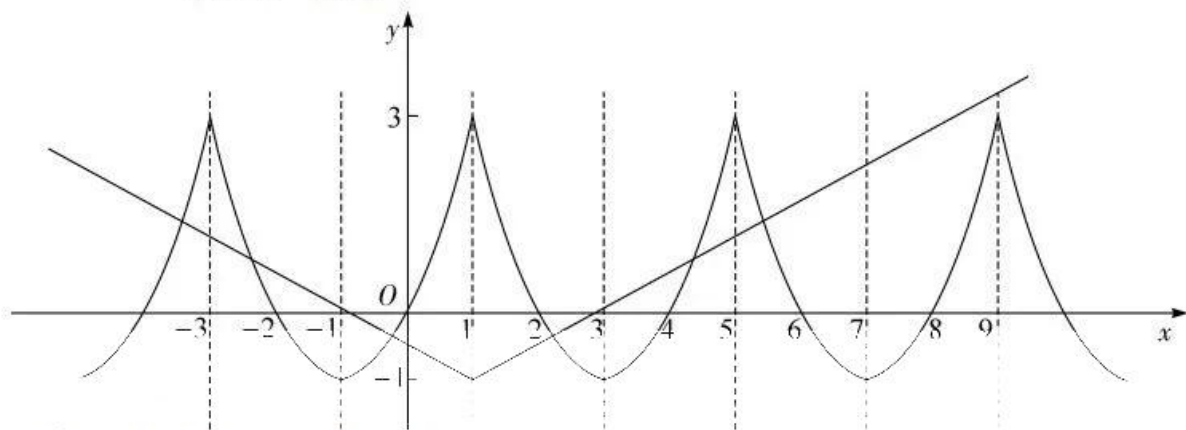
【解析】令 $m = n = 1$, 则 $a_2 = a_1 + a_1 = 1 + 1 = 2$, A 正确; 由题可知 $a_p + a_q = a_{p+q}, a_{-p} = a_{-q}$, 因为 $p - t = s - q$, 所以 $p + q = s + t$, 所以 $a_{p+q} = a_{s+t}$, 所以 $a_p + a_q = a_s + a_t$, 即 $a_p - a_t = a_s - a_q$, B 正确; 令 $n = m$, 则 $a_{2n} = 2a_n$, 所以 $\frac{a_2}{a_1} = 2, \frac{a_4}{a_2} = 2, \frac{a_8}{a_4} = 2, \dots, \frac{a_{1024}}{a_{512}} = 2$, 累乘可得 $\frac{a_{1024}}{a_1} = 2^{10}$, 所以 $a_{1024} = 2^{10}a_1 = 2048$, C 错误; 令 $m = 1$, 则 $a_{n+1} - a_n = a_1 = 1$, 所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列, 所以 $S_n = n \times 1 + \frac{n(n-1)}{2} \times 1 = \frac{n(n+1)}{2}$, D 正确. 故选 ABD.

11. AC 【命题意图】本题考查频率分布直方图、统计数字特征, 考查了数据分析、数学运算的核心素养.

【解析】因为 $\frac{0.024 - 0.0064}{4} = 0.0044$, 所以 $d = 0.024 - 0.0044 = 0.0196, e = 0.0196 - 0.0044 = 0.0152, f = 0.0152 - 0.0044 = 0.0108$. 因为 $0.1 - 0.0196 - 0.0152 - 0.0108 - 0.0064 = 0.048$, 所以 $b = \frac{0.048}{3} = 0.016, a = 0.048 - 0.024 - 0.016 = 0.008$, A 正确; 数据 x 的众数的估计值为 $\frac{30+40}{2} = 35$, 设中位数为 t , 因为 $(0.008 + 0.016 + 0.024) \times 10 = 0.48$, 所以 $0.0196 \times (t - 40) = 0.02$, 解得 $t \approx 41.02$, 即数据 x 的中位数约为 41.02, 所以数据 x 的众数小于中位数, B 错误; 因为 $\bar{x} = 15 \times 0.08 + 25 \times 0.16 + 35 \times 0.24 + 45 \times 0.196 + 55 \times 0.152 + 65 \times 0.108 + 75 \times 0.064 = 42.6$, 所以平均数大于中位数, C 正确; 因为 $1 - (0.0108 + 0.0064) \times 10 = 0.828$, 所以数据 x 的第 80 百分位数小于 60, D 错误. 故选 AC.

12. ABD 【命题意图】本题考查函数的图象与性质,考查了直观想象、数学抽象、数学运算的核心素养.

【解析】由 $f(x+2)=f(x-2)$, 得 $f(x)=f(x+4)$, 所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数. 由 $f(2-x)=f(x)$, 得 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称. 因为 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x)=(x+1)^2-1$, 所以 $f(22)=f(2)=f(0)=(0+1)^2-1=0$, A 正确; 由题易得 $f(x)_{\max}=f(1)=(1+1)^2-1=3$, $f(x)_{\min}=f(-1)=(-1+1)^2-1=-1$, 所以 $|f(x_2)-f(x_1)|_{\max}=f(x)_{\max}-f(x)_{\min}=3-(-1)=4$, B 正确; 作 $f(x)$ 的图象如图所示, 易得 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[4k+1, 4k+3], k \in \mathbf{Z}$, C 错误; 因为曲线 $y=k|x-1|-1$ 与 $f(x)$ 的图象有 6 个不同的交点, 所以 $\begin{cases} k|5-1|-1 < 3, \\ k|9-1|-1 > 3, \end{cases}$ 解得 $\frac{1}{2} < k < 1$, D 正确. 故选 ABD. 来源: 高三答案公众号



三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. (答案不唯一, 只需 $m < 1$ 即可) 【命题意图】本题考查平面向量的坐标运算及平面向量的模, 考查了数学运算的核心素养.

【解析】方法一: 因为 $a=(-2, 1), b=(m, 2)$, 所以 $a+b=(-2+m, 3), a-b=(-2-m, -1)$. 又因为 $|a+b| > |a-b|$, 所以 $\sqrt{(-2+m)^2+3^2} > \sqrt{(-2-m)^2+(-1)^2}$, 解得 $m < 1$.

方法二: 因为 $|a+b| > |a-b|$, 所以 $a^2+2a \cdot b+b^2 > a^2-2a \cdot b+b^2$, 即 $a \cdot b > 0$, 故 $-2m+2 > 0$, 解得 $m < 1$. 所以 m 的一个可能取值为 0. (答案不唯一, 只需 $m < 1$ 即可)

14. 0.4 【命题意图】本题考查线性回归分析, 考查了数学运算、逻辑推理、数据分析等核心素养.

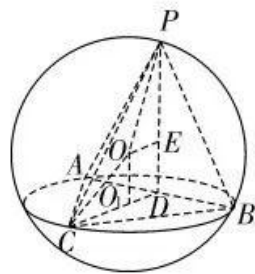
【解析】因为 $\bar{x}=10, \bar{y}=8$, 所以样本点的中心为 $(10, 8)$. 又因为经验回归直线 $\hat{y}=-3.2x+\hat{a}$ 过样本点的中心, 所以 $8=-3.2 \times 10+\hat{a}$, 所以 $\hat{a}=40$. 所以经验回归方程为 $\hat{y}=-3.2x+40$. 当 $x=9.5$ 时, $\hat{y}=-3.2 \times 9.5+40=9.6$, 所以残差为 $10-9.6=0.4$.

15. $[-2, -1)$ 【命题意图】本题考查导数的应用及解不等式, 考查了数学抽象、逻辑推理、数学运算等核心素养.

【解析】因为 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2+(a-1)x, x>0$, 所以 $f'(x)=\frac{x^2+(a-1)x+1}{x}$. 因为 x_1, x_2 是函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2+(a-1)x$ 的两个极值点, 所以 $f'(x)=0$ 有两个正根, 即方程 $x^2+(a-1)x+1=0$ 有两个不同的正根 x_1, x_2 . 所以 $\Delta=a^2-2a-3>0$, 所以 $a>3$ 或 $a<-1$. 又 $x_1+x_2=1-a>0, x_1x_2=1$, 得 $a<1$, 故 $a<-1$. 因为 $f(x_1)+f(x_2)=\left[\ln x_1+\frac{1}{2}x_1^2+(a-1)x_1\right]+\left[\ln x_2+\frac{1}{2}x_2^2+(a-1)x_2\right]=\ln x_1x_2+\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2-x_1x_2+(a-1)(x_1+x_2)=\ln 1+\frac{1}{2}(1-a)^2-1-(a-1)^2=-\frac{1}{2}a^2+a-\frac{3}{2}$, 又 $f(x_1)+f(x_2) \geq -\frac{11}{2}$, 所以 $-\frac{1}{2}a^2+a-\frac{3}{2} \geq -\frac{11}{2}$, 即 $a^2-2a-8 \leq 0$, 解得 $-2 \leq a \leq 4$. 综上所述, 实数 a 的取值范围是 $[-2, -1)$.

16. $\frac{27}{8}$ 【命题意图】本题考查空间几何体的外接球及空间几何体的体积,考查了数学运算、直观想象、逻辑推理等核心素养.

【解析】如图所示,点 O 是三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心,设球 O 的半径为 R , O_1 是 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心,设圆 O_1 的半径为 r ,点 P 到底面 ABC 的距离为 h ,由题意,可得 $4\pi R^2 = 15\pi$,则 $R^2 = \frac{15}{4}$. 因为 $\triangle ABC$ 是边长为 3 的正三角形,所以由正弦定理,



可得 $2r = \frac{BC}{\sin A} = \frac{3}{\sin 60^\circ}$, 则 $r = \sqrt{3}$. 所以三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} h = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^2 \times h = \frac{3\sqrt{3}}{4} h$, 三棱锥 $P-ABC$ 的体积取最大值则需要 h 最大. 由题意可

知,点 P 在过 AB 且与底面 ABC (此处底面 ABC 为水平) 垂直的截面圆的圆周上运动,当点 P 运动到该圆的最高点时, h 最大. 如图所示,取 AB 的中点 D , 连接 CD, PD, OO_1, PO, CO , 过点 O 作 $OE \perp PD$. 由圆的对称性可知,此时 $PA = PB$, 则 $PD \perp AB$, 又平面 $PAB \perp$ 平面 ABC , 且平面 $PAB \cap$ 平面 $ABC = AB, PD \subset$ 平面 PAB , 所以 $PD \perp$ 平面 ABC . 因为在 $\triangle OO_1C$ 中, $O_1O^2 + O_1C^2 = OC^2$, 又 $O_1C = r = \sqrt{3}$, 所以 $O_1O^2 = OC^2 - O_1C^2 = R^2 - r^2 = \frac{3}{4}$. 易得四边形 OO_1DE 为矩形, 所以 $ED = O_1O = \frac{\sqrt{3}}{2}, EO = O_1D = \frac{1}{3} CD = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 因为在 $\triangle POE$ 中, $PE = \sqrt{PO^2 - OE^2} = \sqrt{R^2 - OE^2} = \sqrt{3}$, 所以 $h_{\max} = PD = PE + ED = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 所以 $V_{\max} = \frac{27}{8}$.

四、解答题:共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 【命题意图】本题考查三角函数的恒等变换、解三角形,考查了数学运算、数学建模的核心素养.

【解析】(1) 因为 $f(x) = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2\sqrt{3} \cos^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} = \sin x + \sqrt{3}(\cos x + 1) - \sqrt{3}$
 $= \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2\sin(x + \frac{\pi}{3})$ 2 分

又 $f(A) = \sqrt{3}$, 所以 $\sin(A + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 5 分

(2) 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = 2\sqrt{3}$, 即 $\frac{a}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3}$,

所以 $a = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$.

由余弦定理得 $9 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{3} = b^2 + c^2 - bc \geq 2bc - bc = bc$, 当且仅当 $b = c$ 时, 等号成立.

所以 $bc \leq 9$ 8 分

因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} bc$,

又 bc 的最大值为 9, 来源: 高三答案公众号

所以 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ 10 分

18. 【命题意图】本题考查二项分布、互斥事件、独立事件发生的概率,考查数据分析、数学运算的核心素养.

【解析】(1) 由题易得, 随机抽取一球, 为黑色球或红色球的概率为 $P = 0.4$, 2 分
 所以 $X \sim B(50, 0.4)$.

所以 $E(X) = 50 \times 0.4 = 20$ 5分

(2) 甲、乙的得分情况可能为

得分情况	200	150	100	90	50	40	0	-10	-20
概率	$\frac{1}{100}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{8}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{16}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{24}{100}$	$\frac{16}{100}$

..... 9分

则甲的得分比乙的得分高,且差值大于100分的概率 $P = \frac{1}{100} \times \frac{85}{100} + \frac{4}{100} \times \frac{65}{100} + \frac{10}{100} \times \frac{40}{100} + \frac{8}{100} \times \frac{16}{100} = \frac{873}{10\,000} = 0.0873$ 12分

19. 【命题意图】本题考查数列的通项、数列求和及不等式,考查了数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】(1) 若选条件①: 因为 $b_n b_{n+1} = 2T_n$, 所以 $b_{n-1} b_n = 2T_{n-1} (n \geq 2)$, 来源: 高三答案公众号

两式相减, 得 $b_n (b_{n+1} - b_{n-1}) = 2b_n (n \geq 2)$.

因为 $b_n \neq 0$, 所以 $b_{n+1} - b_{n-1} = 2 (n \geq 2)$.

又 $b_1 = 1, b_1 b_2 = 2T_1$, 所以 $b_2 = 2$,

所以数列 $\{b_n\}$ 的奇数项、偶数项分别是以 1, 2 为首项, 2 为公差的等差数列.

当 $n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}^+$ 时, $b_{2k-1} = 1 + (k-1) \times 2 = 2k - 1$; 当 $n = 2k, k \in \mathbb{N}^+$ 时, $b_{2k} = 2 + (k-1) \times 2 = 2k$.

综上所述, $b_n = n, n \in \mathbb{N}^+$, 所以 $a_n = \frac{n}{2^n}$ 5分

若选条件②: 设数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q .

因为 $\{b_n\}$ 是首项为 1 的等比数列, 且满足 $b_1, 2b_2, 4b_3$ 成等差数列.

所以 $b_1 = 1$, 且 $4b_3 = b_1 + 2b_2$, 即 $4q^2 = 1 + 2q$, 解得 $q = \frac{1}{2}$, 所以 $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

因为数列 $\{c_n\}$ 的各项均为正数, H_n 为其前 n 项和, 且满足 $2H_n = c_n(c_n - 1)$.

所以当 $n = 1$ 时, $2H_1 = 2c_1 = c_1(c_1 - 1)$, 则 $c_1 = 1$.

因为 $2H_n = c_n(c_n - 1)$, 所以 $2H_{n-1} = c_{n-1}(c_{n-1} - 1) (n \geq 2)$.

两式相减得 $2c_n = c_n^2 - c_{n-1}^2 + c_n - c_{n-1} (n \geq 2)$, 即 $(c_n + c_{n-1})(c_n - c_{n-1} - 1) = 0 (n \geq 2)$.

因为 $c_n > 0$, 故 $c_n - c_{n-1} - 1 = 0 (n \geq 2)$, 所以 $c_n - c_{n-1} = 1 (n \geq 2)$.

所以数列 $\{c_n\}$ 为等差数列, 故 $c_n = 1 + (n-1) \times 1 = n$.

所以 $a_n = \frac{1}{2} b_n c_n = \frac{n}{2^n}$ 5分

若选条件③: 由 $b_{n+2} + b_n - 2b_{n+1} = 2^n$, 得 $(b_{n+2} - b_{n+1}) - (b_{n+1} - b_n) = 2^n$.

令 $b_{n+1} - b_n = u_n$, 则 $u_1 = b_2 - b_1 = 2, u_{n+1} - u_n = 2^n$.

当 $n \geq 2$ 时, $u_n = u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \dots + (u_n - u_{n-1}) = 2 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n$.

又 $u_1 = 2$ 满足上式, 所以 $u_n = 2^n$, 即 $b_{n+1} - b_n = 2^n$.

所以当 $n \geq 2$ 时, $b_n = b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \dots + (b_n - b_{n-1}) = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

又 $b_1 = 1$ 满足上式, 所以 $b_n = 2^n - 1$, 所以 $a_n = \frac{n}{b_n + 1} = \frac{n}{2^n}$ 5分

(2) 证明: 由(1)知 $a_n = \frac{n}{2^n}$,

$$\text{则 } S_n = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2^2} + 3 \times \frac{1}{2^3} + \dots + n \cdot \frac{1}{2^n} \quad \text{①}$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} S_n = 1 \times \frac{1}{2^2} + 2 \times \frac{1}{2^3} + \dots + (n-1) \cdot \frac{1}{2^n} + n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{②}$$

①-②可得:

$$\frac{1}{2}S_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) - n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}$$

所以 $S_n = 2 - \frac{2}{2^n} - \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{2+n}{2^n}$ 9分

因为 $\frac{2+n}{2^n} > 0$, 所以 $S_n = 2 - \frac{2+n}{2^n} < 2$. 来源: 高三答案公众号

又 $S_{n+1} - S_n = \left(2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}\right) - \left(2 - \frac{n+2}{2^n}\right) = \frac{n+1}{2^{n+1}} > 0$, 所以 $\{S_n\}$ 是递增数列.

所以 $S_n \geq S_1 = 2 - \frac{1+2}{2^1} = \frac{1}{2}$, 故 $\frac{1}{2} \leq S_n < 2$ 12分

20. 【命题意图】本题考查空间几何体的线面位置关系、二面角,考查了直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)证明:

方法一:取AD的中点O,连接SO,OE,OF.

因为四边形ABCD是矩形,O,E分别是AD,BC的中点,

所以 $EO \parallel AB$, 所以 $EO \perp AD$.

因为 $\triangle SAD$ 是等边三角形, 所以 $SO \perp AD$.

因为 $SO \cap OE = O$, 所以 $AD \perp$ 平面 SOE .

因为 $SE \subset$ 平面 SOE , 所以 $AD \perp SE$ 3分

因为 $\sqrt{3}SA = 2AB$,

$$\text{所以 } OS = SA \sin \angle SAD = \frac{\sqrt{3}}{2} SA = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} AB = AB = OE.$$

所以 $\triangle SOE$ 是等腰三角形.

因为F是SE的中点, 所以 $OF \perp SE$.

因为 $OE \cap AD = O$,

所以 $SE \perp$ 平面 ADF 6分

方法二:不妨设 $AB = \sqrt{3}$, 则 $SA = AD = SD = 2$.

如图,连接AE,DE,

因为E为BC的中点, 所以 $AE = DE = 2$.

所以 $SD = DE, SA = AE$ 3分

又F为SE的中点,

所以 $DF \perp SE, AF \perp SE$.

因为 $DF \cap AF = F$,

所以 $SE \perp$ 平面 ADF 6分

(2)由(1)方法一易得 AD, OE, SO 两两互相垂直, 建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$,

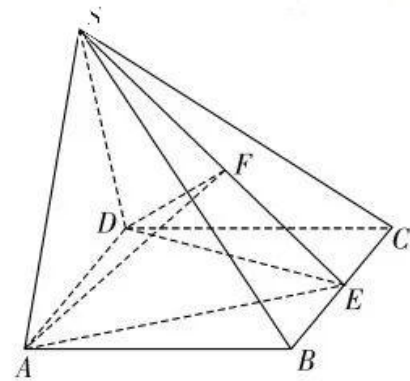
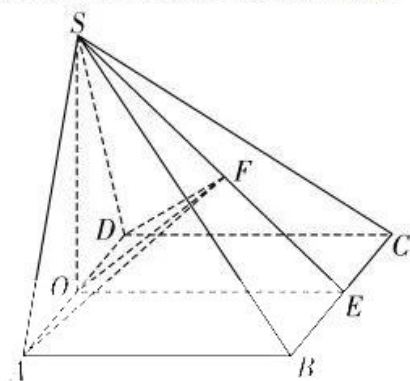
不妨设 $AB = \sqrt{3}$, 则 $AD = 2, OS = \sqrt{3}$,

则 $A(1, 0, 0), B(1, \sqrt{3}, 0), C(-1, \sqrt{3}, 0), S(0, 0, \sqrt{3})$,

$$\vec{SB} = (1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}), \vec{AB} = (0, \sqrt{3}, 0), \vec{BC} = (-2, 0, 0).$$

设平面 SAB 的法向量为 $n = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} n \cdot \vec{SB} = 0, \\ n \cdot \vec{AB} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x + \sqrt{3}y - \sqrt{3}z = 0, \\ \sqrt{3}y = 0, \end{cases}$$



令 $x=\sqrt{3}$, 则 $z=1, y=0$,

所以平面 SAB 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(\sqrt{3}, 0, 1)$ 8 分

设平面 SBC 的法向量为 $\mathbf{m}=(x', y', z')$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{SB} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x' + \sqrt{3}y' - \sqrt{3}z' = 0, \\ -2x' = 0, \end{cases}$$

令 $y'=1$, 则 $x'=0, z'=1$,

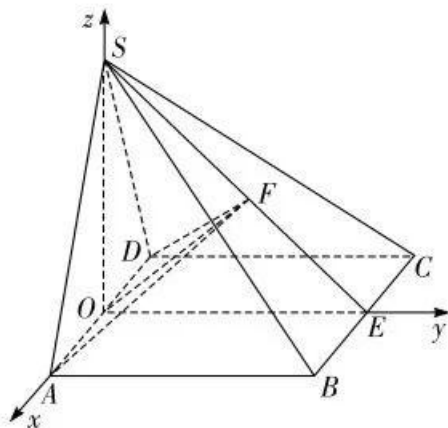
所以平面 SBC 的一个法向量为 $\mathbf{m}=(0, 1, 1)$ 10 分

设二面角 $A-SB-C$ 的平面角为 θ , 则

$$|\cos \theta| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{n}| |\mathbf{m}|} = \frac{|\sqrt{3} \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 1|}{2 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{所以 } \sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

所以二面角 $A-SB-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{14}}{4}$ 12 分



21. 【命题意图】本题考查椭圆的方程、直线与椭圆的位置关系及定点问题,考查了直观想象、数学运算、逻辑推理等核心素养.

【解析】(1) 因为 $\angle F_1 M F_2$ 的最大值为 120° .

所以 M 为短轴的顶点时, $\angle F_1 M F_2 = 120^\circ$. 此时易得 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

又点 M 到右焦点 F_2 距离的最小值为 $2 - \sqrt{3}$, 即 $a - c = 2 - \sqrt{3}$. 解得 $a = 2, c = \sqrt{3}$.

又由 $a^2 = b^2 + c^2$, 可得 $b = 1$.

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 4 分

(2) 证明:

方法一: 当直线 l 的斜率不存在时, 设 $l: x = m$, 联立 $\begin{cases} x = m, \\ x^2 + 4y^2 = 4, \end{cases}$

$$\text{解得 } y = \pm \sqrt{1 - \frac{m^2}{4}}, \text{ 所以 } P\left(m, \sqrt{1 - \frac{m^2}{4}}\right), Q\left(m, -\sqrt{1 - \frac{m^2}{4}}\right) \text{ 或 } P\left(m, -\sqrt{1 - \frac{m^2}{4}}\right), Q\left(m, \sqrt{1 - \frac{m^2}{4}}\right).$$

$$\text{又 } A(2, 0), \text{ 所以 } \overrightarrow{AP} = \left(m - 2, \sqrt{1 - \frac{m^2}{4}}\right), \overrightarrow{AQ} = \left(m - 2, -\sqrt{1 - \frac{m^2}{4}}\right) \text{ 或 } \overrightarrow{AP} = \left(m - 2, -\sqrt{1 - \frac{m^2}{4}}\right), \overrightarrow{AQ} =$$

$$\left(m - 2, \sqrt{1 - \frac{m^2}{4}}\right),$$

因为以 PQ 为直径的圆恒过点 A , 所以 $AP \perp AQ$.

$$\text{所以 } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = (m - 2)^2 - \left(1 - \frac{m^2}{4}\right) = 0, \text{ 解得 } m = \frac{6}{5} \text{ 或 } m = 2 \text{ (舍去)},$$

此时直线 l 的方程为 $x = \frac{6}{5}$ 6 分

当直线 l 的斜率存在时, 易知直线 l 的斜率不为 0, 设 $l: y = kx + n$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + n, \\ x^2 + 4y^2 = 4, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得 } (4k^2 + 1)x^2 + 8knx + 4(n^2 - 1) = 0.$$

由 $\Delta > 0$, 得 $4k^2 - n^2 + 1 > 0$,

$$\text{由根与系数的关系, 知 } x_1 + x_2 = -\frac{8kn}{4k^2 + 1}, x_1 x_2 = \frac{4(n^2 - 1)}{4k^2 + 1}. \text{ 8 分}$$

因为 $\overrightarrow{AP} = (x_1 - 2, y_1)$, $\overrightarrow{AQ} = (x_2 - 2, y_2)$,

所以 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = (x_1 - 2)(x_2 - 2) + y_1 y_2 = (k^2 + 1)x_1 x_2 + (kn - 2)(x_1 + x_2) + (n^2 + 4) = 0$,

将 $x_1 + x_2 = -\frac{8kn}{4k^2 + 1}$, $x_1 x_2 = \frac{4(n^2 - 1)}{4k^2 + 1}$ 代入上式整理得 $12k^2 + 5n^2 + 16kn = 0$,

即 $(6k + 5n)(2k + n) = 0$, 所以 $n = -\frac{6}{5}k$ 或 $n = -2k$.

当 $n = -2k$ 时, 直线 l 为 $y = kx - 2k = k(x - 2)$, 此时直线 l 过点 A , 不符合题意, 舍去;

当 $n = -\frac{6}{5}k$ 时, 直线 l 为 $y = k(x - \frac{6}{5})$, 此时直线 l 过定点 $(\frac{6}{5}, 0)$ 11 分

综上所述, 直线 l 恒过定点 $(\frac{6}{5}, 0)$ 12 分

方法二:

由题意知, 直线 l 的斜率不为零, 设直线 l 的方程为 $x = my + n$.

联立 $\begin{cases} x = my + n, \\ x^2 + 4y^2 = 4, \end{cases}$ 得 $(4 + m^2)y^2 + 2mny + n^2 - 4 = 0$.

由 $\Delta > 0$, 得 $m^2 - n^2 + 4 > 0$.

所以 $y_1 + y_2 = -\frac{2mn}{m^2 + 4}$, $y_1 y_2 = \frac{n^2 - 4}{m^2 + 4}$ 6 分

因为 $A(2, 0)$, 所以 $\overrightarrow{AP} = (x_1 - 2, y_1)$, $\overrightarrow{AQ} = (x_2 - 2, y_2)$.

由题意知 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{AQ}$, 所以 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = (x_1 - 2)(x_2 - 2) + y_1 y_2 = 0$.

即 $x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + y_1 y_2 + 4 = 0$.

即 $(m^2 + 1)y_1 y_2 + (mn - 2m)(y_1 + y_2) + n^2 - 4n + 4 = 0$ 8 分

将 $y_1 + y_2 = -\frac{2mn}{m^2 + 4}$, $y_1 y_2 = \frac{n^2 - 4}{m^2 + 4}$ 代入上式整理得 $5n^2 - 16n - 12 = 0$.

解得 $n = 2$ 或 $n = \frac{6}{5}$ 10 分

由题意知直线 l 不过点 A , 所以 $n = \frac{6}{5}$.

所以直线 l 的方程为 $x = my + \frac{6}{5}$.

所以直线 l 恒过定点 $(\frac{6}{5}, 0)$ 12 分

方法三(平移齐次化): 来源: 高三答案公众号

将椭圆向左平移两个单位长度得曲线 C' : $\frac{(x+2)^2}{4} + y^2 = 1$,

即 $\frac{x^2}{4} + x + y^2 = 0$ ①, 则平移后右顶点 $A'(0, 0)$, 记平移后 P, Q 的对应点分别为 P', Q' 6 分

设直线 l' 的方程为 $x = ty + s, s \neq 0$,

所以 $\frac{x - ty}{s} = 1$.

将上式代入①得 $\frac{x^2}{4} + y^2 + x \cdot \frac{x - ty}{s} = 0$ 8 分

等式两边同时除以 x^2 ,

得 $(\frac{y}{x})^2 - \frac{t}{s} \cdot \frac{y}{x} + \frac{1}{4} + \frac{1}{s} = 0$.

由题意知 $A'P' \perp A'Q'$, 所以 $k_{A'P'} \cdot k_{A'Q'} = -1$ 10 分

即 $\frac{1}{4} + \frac{1}{s} = -1$, 解得 $s = -\frac{4}{5}$.

所以直线 l' 的方程为 $x = ty - \frac{4}{5}$.

所以平移前直线 l 恒过定点 $(\frac{6}{5}, 0)$ 12 分

22. 【命题意图】本题考查函数、方程及不等式的转化, 函数的单调性、最值、极值问题, 考查了数学运算、数学抽象、直观想象、逻辑推理的核心素养, 来源: 高三答案公众号

【解析】(1) 由题易得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

由 $f(x) \leq 0$, 不等式两边同除以 x , 得 $\ln x - x + a \leq 0$.

设 $g(x) = \ln x - x + a, x > 0$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x} - 1$ 2 分

令 $g'(x) = 0$, 得 $x = 1$.

当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减. 4 分

所以 $g(x) \leq g(1) = \ln 1 - 1 + a = -1 + a$.

依题知 $-1 + a \leq 0$, 得 $a \leq 1$,

所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$ 6 分

(2) 证明: $f'(x) = \ln x + 1 - 2x + a$,

令 $f(x) = \ln x + 1 - 2x + a, x > 0$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} - 2$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{2}$.

当 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减. 8 分

因为函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[\frac{1}{e}, b]$, 所以 $f'(\frac{1}{e}) = 0, f'(b) = 0, b > \frac{1}{2}$.

所以 $\ln \frac{1}{e} + 1 - 2 \times \frac{1}{e} + a = 0$, 解得 $a = \frac{2}{e}$.

$\ln b + 1 - 2b + a = 0$, 即 $\ln b = -1 + 2b - a = 2b - 1 - \frac{2}{e}$.

又当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (\frac{1}{e}, b)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (b, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{e}, b)$ 上单调递增, 在 $(b, +\infty)$ 上单调递减. 10 分

所以 $f(x)$ 的极大值 $M = f(b) = b \ln b - b^2 + b \cdot \frac{2}{e} = b(2b - 1 - \frac{2}{e}) - b^2 + \frac{2b}{e} = b^2 - b$.

因为 $f'(1) = \ln 1 + 1 - 2 \times 1 + \frac{2}{e} = \frac{2}{e} - 1 < 0, f'(\frac{1}{2}) = -\ln 2 + 1 - 2 \times \frac{1}{2} + \frac{2}{e} = \frac{2}{e} - \ln 2 > 0$,

所以 $b \in (\frac{1}{2}, 1)$, 所以 $b^2 - b \in (-\frac{1}{4}, 0)$,

所以函数 $f(x)$ 的极大值 $M \in (-\frac{1}{4}, 0)$ 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线



自主选拔在线
微信号: zizzsw



自主选拔在线
微信号: zizzsw



自主选拔在线
微信号: zizzsw