考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本试卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $zi+2-3i=0$，则 $\bar{z}=$

A. $3+2i$　　B. $3-2i$　　C. $2+3i$　　D. $2-3i$

2. 已知集合 $A=\{x\mid(2a-x)(x-a)<0\}$，若 $2\notin A$，则实数 a 的取值范围为

$2\le a/2\ge 2a.$

A. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$　　B. $[1,2)$　　C. $(1,2)$　　D. $[1,2]$

3. 若 $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^n$ 的展开式中第 3 项为常数项，则该展开式中各项系数的和为

$(\sqrt{x})^{n-2}\cdot\frac{4}{x^2}=kx^0.$　$n=\cancel{4}6.$　$(\sqrt{1}-\frac{2}{1})^6=1$　CD.

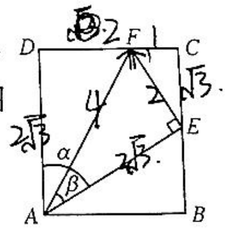
A. 729　　B. 64　　C. 1　　D. -1

23

4. 若 $\tan(\alpha-\pi)=2$，则 $\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=$

A. $-\frac{1}{3}$　　B. -3　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 3

5. 古希腊数学家帕普斯通过在矩形 $ABCD$ 中构造内接直角三角形 AEF（$\angle AEF=90^\circ$），证明了三角公式 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$（其中 $\angle DAE=\alpha$，$\angle EAF=\beta$），如图所示. 若 $AD=2\sqrt{3}$，$\alpha=60^\circ$，$\beta=30^\circ$，$\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{EF}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AD}=$



A. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$　　B. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

C. $\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　D. $\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

6. 某校举行运动会期间，将学校 600 名学生编号为 001，002，003，…，600，采用系统抽样方法抽取一个容量为 50 的样本，且在第一段中随机抽得的号码为 009. 将这 600 名学生分别安排在看台的 A，B，C 三个区，001 号到 130 号在 A 区，131 号到 385 号在 B 区，386 号到 600 号在 C 区，则样本中属于 A，B，C 三个区的人数分别为

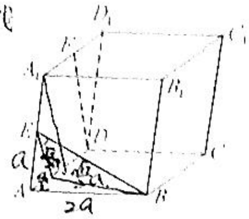
$\frac{600}{50}=12.$

A. 10，21，19　　B. 10，20，20

C. 11，20，19　　D. 11，21，18

$12n-3.$
$n=11.\ 129.$
$n=31.\ 369.$
$n=32.\ 381.$

7. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别为棱 AA_1，A_1D_1 的中点，则直线 BE 与 DF 所成角的余弦值为



A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{4}{5}$

8. 已知函数 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，先将其图象上的所有点的横坐标伸长到原来的4倍(纵坐标不变)，再将所得到的图象向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则

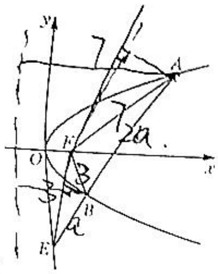
A. $g(x)$ 的最小正周期是 2π

B. $g(x)$ 的最小值为 -2

C. $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增

D. $g(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 对称

9. 如图，已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，直线 l 与 C 相交于 A,B 两点，与 y 轴相交于 E 点. 已知 $|AF|=7$，$|BF|=3$，若 $\triangle AEF$，$\triangle BEF$ 的面积分别为 S_1,S_2，且 $\frac{S_1}{S_2}=3$，则抛物线 C 的方程为



A. $y^2=2x$

B. $y^2=4x$

C. $y^2=6x$

D. $y^2=8x$

10. 设函数 $f(x)=x\left(x^2-\cos\frac{x}{3}+2\right)(-3<x<3)$，则不等式 $f(1+x)+f(2)<f(1-x)$ 的解集是

A. $(-2,-1)$　　B. $(-2,1)$　　C. $(-1,2)$　　D. $(1,2)$

11. 已知圆 $C_1:x^2+y^2=1$，圆 $C_2:x^2+y^2=9$，$P(x_1,y_1)$ 在圆 C_1 上，$Q(x_2,y_2)$ 在圆 C_2 上，则下列说法错误的是

3.　　ADC

A. $|PQ|$ 的取值范围是 $[2,4]$

B. 直线 $x_1x+y_1y=1$ 是圆 C_1 在 P 点处的切线

C. 直线 $x_1x+y_1y=9$ 与圆 C_2 相交

D. 直线 $x_2x+y_2y=1$ 与圆 $x^2+y^2=\frac{1}{9}$ 相切

12. 已知 $a-1=\ln a$，$b-\mathrm{e}=\ln\frac{b}{\mathrm{e}}$，$c-\pi=\ln\frac{c}{\pi}$，其中 $a,b,c\in(0,+\infty)$ 且 $b\neq\mathrm{e}$，$c\neq\pi$，则

A. $a<c<b$　　B. $c<a<b$　　C. $a<b<c$　　D. $c<b<a$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

$y=2x$，$\frac{b}{a}=2$，$b=2a$

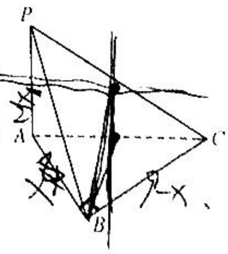
13. 已知双曲线 $C:\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，若直线 $2x-y=0$ 为 C 的一条渐近线，则 C 的离心率为 $\underline{\sqrt{5}/2}$.

$\frac{C_{11}^{2}}{C_{12}^{3}}$

14. 小明在一个专用的纸箱中收藏了一套精美的 2022 年北京冬奥会十二生肖纪念邮票，共 12 枚，现从这 12 枚邮票中随机抽取 3 枚，恰好有 1 枚为老虎图案邮票的概率为 $\underline{\frac{1}{4}}$.

15. 在 $\triangle ABC$ 中，D 为 BC 的中点，若 $AB=4$，$AC=2$，$AD=2\sqrt{2}$，则 $BC=$ $\underline{2\sqrt{2}}$.

16. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，$AP=AB$，$AB+BC=9$，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积的最小值为 $\underline{54\pi}$.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

山东为我国最大的“菜园子”和“菜篮子”，蔬菜产量占全国的 12%，居全国第一位；农产品出口达到 1 150.3 亿元，占全国的 22%，连续 20 多年领跑全国。寿光、兰陵、章丘等作为代表的蔬菜生产和流通基地为保证人们的菜篮子做出了重要贡献。为了解近年来山东的蔬菜生产状况，统计了近 6 年山东蔬菜年产量（万吨）如下表：

年份	2016	2017	2018	2019	2020	2021
年份代码 t	1	2	3	4	5	6
年产量 y(万吨)	8 034	8 133	8 192	8 181	8 435	8 801

（1）根据表中数据，建立 y 关于 t 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}t+\hat{a}$；（$\hat{b}$ 用最简分数表示）

（2）根据（1）中的线性回归方程，预测今年（2022 年）山东蔬菜的年产量。

附：①对于一组数据 $(t_1,y_1),(t_2,y_2),\cdots,(t_n,y_n)$，其回归直线 $\hat{y}=\hat{b}t+\hat{a}$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}$。

②参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{6}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})=2\ 365$。

18.（本小题满分 12 分）

在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n=\begin{cases}2n-1, & n\text{ 为奇数},\\ 2^n, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

（1）求 a_1,a_2,a_3；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n。

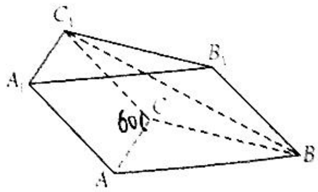
$\frac{-3}{2\cdot 2}$

19.（本小题满分 12 分）

如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 各棱长均为 2，$\angle C_1CA=60°$。

（1）求证：$AC\perp BC_1$；

（2）若二面角 A_1-AC-B 的大小为 120°，求直线 B_1C_1 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值。



20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，四点 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$，$(0,-\sqrt{3})$，$\left(1,-\frac{3}{2}\right)$，$\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 中恰有三点在椭圆 C 上.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)若点 F 为 C 的左焦点，点 P 为 C 上位于第一象限的一点，M,N 为 y 轴上的两个动点（点 M 在 x 轴上方），满足 $PM\perp PN$，$FM\perp FN$，线段 PN 交 x 轴于点 Q. 求证：$\frac{|PQ|}{|QN|}$ 为定值.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=1-e^x-x+\sin x+t\ln(1+x)\ (t\in\mathbf{R})$.

(1)当 $t=1$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)当 $t\geqslant 1$ 时，求证：$f(x)<2+\sqrt{2}+t\ln t$.

$-e^{t-1}+\cos(t-1)+\frac{1}{t}$

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分 10 分）选修 4－4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的方程为 $\sqrt{3}x+y-4\sqrt{3}=0$；以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，且曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$.

(1)求 C 的直角坐标方程和参数方程；

(2)若直线 l 与 C 交于 A,B 两点，P 为 C 上异于 A,B 的一点，求△PAB 面积的最大值.

23.（本小题满分 10 分）选修 4－5：不等式选讲

已知不等式 $|x|+|x-3|\leqslant 5$ 的解集为 $[a,b]$.

(1)求 a,b 的值；

(2)若 $m>0,n>0,bm+n+a=0$，求证：$m+n\geqslant 9mn$.

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. B　由题意,得 $z=\frac{-2+3i}{i}=\frac{(-2+3i)(-i)}{i\times(-i)}=\frac{2i-3i^2}{1}=3+2i$,所以 $\bar{z}=3-2i$. 故选 B.

2. D　因为 $2\notin A$,所以 $(2a-2)(2-a)\geqslant0$,解得 $1\leqslant a\leqslant2$. 故选 D.

3. C　因为 $T_3=C_n^2(\sqrt{x})^{n-2}\left(-\frac{2}{x}\right)^2=4C_n^2x^{\frac{n-6}{2}}$ 为常数项,所以 $\frac{n-6}{2}=0$,所以 $n=6$. 令 $x=1$,得 $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^6$ 展开式的各项系数和为 $(1-2)^6=1$. 故选 C.

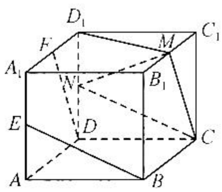
4. A　由题意得 $\tan\alpha=2$,则 $\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=-\frac{1}{3}$. 故选 A.

5. A　在直角三角形 ADF 中,$DF=2,AF=4$;在直角三角形 AEF 中,$EF=2$;在直角三角形 CEF 中,$CF=1,CE=\sqrt{3}$. 综上,F 是 CD 上靠近 C 的三等分点,E 是 BC 的中点.

法一:$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,两式联立消去 $\overrightarrow{AB}$,得 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 故选 A.

法二:以 A 为原点,AB 所在直线为 x 轴建立直角坐标系,则 $A(0,0)$,$D(0,2\sqrt{3})$,$E(3,\sqrt{3})$,$F(2,2\sqrt{3})$,设 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AF}+\mu\overrightarrow{EF}$,得 $(0,2\sqrt{3})=\lambda(2,2\sqrt{3})+\mu(-1,\sqrt{3})$,解得 $\lambda=\frac{1}{2}$,$\mu=1$,$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 故选 A.

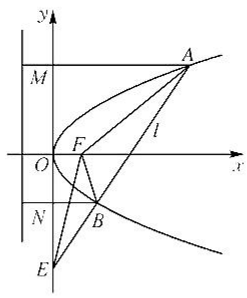
6. D　由题意知抽样间隔为 $\frac{600}{50}=12$,因为在第一段中随机抽得的号码为 009,故所有抽到的号码为 $12k-9$ $(k=0,1,2,\cdots,49)$,根据条件列出不等式即可解得 A 区抽中 11 人,B 区抽中 21 人,C 区抽中 18 人. 故选 D.



7. A　法一:以 D 为原点,以 $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别作为 x,y,z 轴的正方向,建立空间直角坐标系 $D-xyz$,设正方体的棱长为 2,则 $D(0,0,0)$,$F(1,0,2)$,$B(2,2,0)$,$E(2,0,1)$,所以 $\overrightarrow{DF}=(1,0,2)$,$\overrightarrow{BE}=(0,-2,1)$,所以所求角的余弦值为 $\left|\frac{\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{DF}|\cdot|\overrightarrow{BE}|}\right|=\frac{2}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{2}{5}$. 故选 A.

法二:分别取 B_1C_1,DD_1 的中点 M,N,连接 CN,CM,MN,D_1M,易证 $CN/\!/BE,CM/\!/DF$,则 $\angle MCN$ 为 BE 与 DF 所成的角(或其补角),设正方体的棱长为 2,易求 $CM=CN=\sqrt{5}$,$MN=\sqrt{6}$,所以 $\cos\angle MCN=\frac{5+5-6}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{2}{5}$. 故选 A.

8. C　由题意知 $g(x)=\cos\left(\frac{1}{2}x-\frac{2\pi}{3}\right)$,其最小正周期为 4π,最小值为 -1,其单调递增区间为 $\left[-\frac{2\pi}{3}+4k\pi,\frac{4\pi}{3}+4k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$,其图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi,0\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 对称,故 ABD 均错,C 正确. 故选 C.

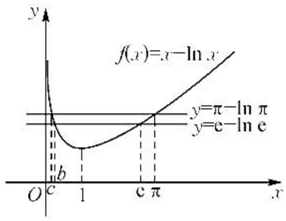


9. B　如图,过 A,B 分别作 C 的准线的垂线分别交 y 轴于点 M,N,因为 C 的准线为 $x=-\frac{p}{2}$,所以 $|AM|=|AF|-\frac{p}{2}=7-\frac{p}{2}$,$|BN|=|BF|-\frac{p}{2}=3-\frac{p}{2}$,所以 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{|AE|}{|BE|}=\frac{|AM|}{|BN|}=\frac{7-\frac{p}{2}}{3-\frac{p}{2}}=3$,解得 $p=2$,故 C 的方程为 $y^2=4x$. 故选 B.

10. A　由题意知 $f(x)$ 的定义域为 $(-3,3)$，且 $f(-x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数，当 $x\in[0,3)$ 时，易证 $f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 在 $(-3,3)$ 上单调递增，令 $g(x)=f(1+x)+f(2)-f(1-x)$，则 $\begin{cases}-3<1+x<3,\\ -3<1-x<3,\end{cases}$ 则 $-2<x<2$，且 $g(x)$ 在 $(-2,2)$ 上单调递增，又 $g(-1)=f(0)+f(2)-f(2)=0$，所以 $g(x)<0$ 的解集为 $(-2,-1)$．故选 A.

11. C　因为圆 C_1，C_2 的圆心均为 $(0,0)$，半径分别为 1，3，所以 $2\leqslant|PQ|\leqslant4$，故 A 正确；若 $x_1y_1\neq0$，则直线 OP 的斜率为 $\frac{y_1}{x_1}$，则过点 P 的切线斜率为 $-\frac{x_1}{y_1}$，故过点 P 的切线方程为 $y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$，化简得 $x_1x+y_1y=1$，易验证当 $x_1=0$ 时，或 $y_1=0$ 时，切线方程符合 $x_1x-y_1y=1$，故 B 正确；点 $(0,0)$ 到 $x_1x+y_1y=9$ 的距离为 $\frac{|-9|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=9>3$，则直线 $x_1x+y_1y=9$ 与圆 C_2 相离，故 C 错误；点 $(0,0)$ 到 $x_2x+y_2y=1$ 的距离为 $\frac{|-1|}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}=\frac{1}{3}$，所以直线 $x_2x+y_2y=1$ 与圆 $x^2+y^2=\frac{1}{9}$ 相切，故 D 正确. 故选 C.

12. D　由题意可知，$a-1=\ln a-\ln 1$，$b-e=\ln b-\ln e$，$c-\pi=\ln c-\ln\pi$，所以 $a-\ln a=1-\ln 1$，$b-\ln b=e-\ln e$，$c-\ln c=\pi-\ln\pi$. 令 $f(x)=x-\ln x$，则 $f(a)=f(1)$，$f(b)=f(e)$，$f(c)=f(\pi)$；又 $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，如图所示；因为 $1<e<\pi$，所以 $f(1)<f(e)<f(\pi)$，所以 $f(a)<f(b)<f(c)$，又 $b\neq e$，$c\neq\pi$，且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，所以 $c<b<a$. 故选 D.



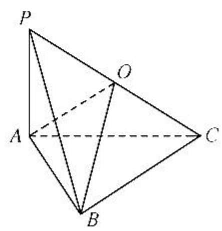
13. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　由题意知 $\frac{a}{b}=2$，所以 $e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

14. $\frac{1}{4}$　$P=\frac{C_{11}^2}{C_{12}^3}=\frac{1}{4}$.

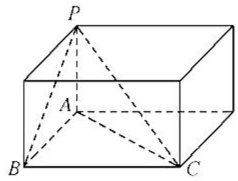
15. $2\sqrt{2}$　法一：设 $BD=x$，因为 $\angle ADB+\angle ADC=180^\circ$，所以 $\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=0$，由余弦定理，得 $\frac{BD^2+AD^2-AB^2}{2BD\cdot AD}+\frac{DC^2+AD^2-AC^2}{2DC\cdot AD}=0$，即 $\frac{x^2+8-16}{4\sqrt{2}x}+\frac{x^2+8-4}{4\sqrt{2}x}=0$，所以 $x=\sqrt{2}$，所以 $BC=2\sqrt{2}$.

法二：由 D 为 BC 的中点，得 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$，所以 $\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2)$，即 $8=\frac{1}{4}(16+2\times4\times2\cos\angle BAC+4)$，所以 $\cos\angle BAC=\frac{3}{4}$，所以 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle BAC=16+4-2\times4\times2\times\frac{3}{4}=8$，所以 $BC=2\sqrt{2}$.

16. 54π　法一：因为 $PA\perp$ 平面 ABC，BC，$AC\subset$ 平面 ABC，所以 $PA\perp BC$，$PA\perp AC$，$PA\perp AB$，又 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，所以 $BC\perp AB$，因为 $PA\cap AB=A$，PA，$AB\subset$ 平面 PAB，所以 $BC\perp$ 平面 PAB，又 $PB\subset$ 平面 PAB，所以 $BC\perp PB$. 如图，取 PC 的中点 O，连接 OA，OB，则 $OA=OB=OC=OP=\frac{1}{2}PC$，故 O 为三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心. 设 $AB=x(0<x<9)$，则 $BC=9-x$，所以 $PC=\sqrt{PA^2+AB^2+BC^2}=\sqrt{3x^2-18x+81}=\sqrt{3(x-3)^2+54}$，所以当 $x=3$ 时，$(PC)_{\min}=3\sqrt{6}$，故三棱锥 $P-ABC$ 的外接球 O 的半径的最小值为 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$，所以球 O 的表面积的最小值为 $4\pi\times\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2=54\pi$.



法二：根据题意三棱锥 $P-ABC$ 可以扩展为如图的长方体，则 PC 为长方体的对角线，也是三棱锥 $P-ABC$ 外接球的直径．因为 $AP=AB=3$，$BC=6$，所以 $PC=\sqrt{PA^2+AB^2+BC^2}$，以下同法1，略．



17．解：(1)由题意知 $\bar{t}=3.5$，$\bar{y}=8\ 296$，$\sum\limits_{i=1}^{6}(t_i-\bar{t})^2=17.5$．…………………… 2分

$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{6}(t_i-\bar{t})^2}=\dfrac{2\ 365}{17.5}=\dfrac{946}{7}$，…………………… 4分

又 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=8\ 296-\dfrac{946}{7}\times3.5=7\ 823$，…………………… 6分

所以 y 关于 t 的线性回归方程为 $\hat{y}=\dfrac{946}{7}t+7\ 823$．…………………… 7分

(2)当年份为2022年时，年份代码 $t=7$，…………………… 8分

所以 $\hat{y}=\dfrac{946}{7}\times7+7\ 823=8\ 769$．…………………… 10分

所以可预测2022年山东蔬菜的年产量为8 769万吨．…………………… 12分

18．解：(1)因为 $a_n=\begin{cases}2n-1, n\text{为奇数},\\2^n, n\text{为偶数},\end{cases}$

所以 $a_1=2\times1-1=1$，$a_2=2^2=4$，$a_3=2\times3-1=5$．…………………… 3分

(2)因为 $a_n=\begin{cases}2n-1, n\text{为奇数},\\2^n, n\text{为偶数},\end{cases}$ 所以 $a_1,a_3,a_5,\cdots$ 是以1为首项，4为公差的等差数列，

$a_2,a_4,a_6,\cdots$ 是以4为首项，4为公比的等比数列，…………………… 5分

当 n 为奇数时，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项中有 $\dfrac{n+1}{2}$ 个奇数项，有 $\dfrac{n-1}{2}$ 个偶数项，…………………… 6分

所以 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=(a_1+a_3+\cdots+a_{n-2}+a_n)+(a_2+a_4+\cdots+a_{n-3}+a_{n-1})$

$=\dfrac{n+1}{2}\times1+\dfrac{\frac{n+1}{2}\left(\frac{n+1}{2}-1\right)}{2}\times4+\dfrac{4(1-4^{\frac{n-1}{2}})}{1-4}=\dfrac{n^2+n}{2}+\dfrac{2^{n+1}-4}{3}$；…………………… 8分

当 n 为偶数时，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项中有 $\dfrac{n}{2}$ 个奇数项，有 $\dfrac{n}{2}$ 个偶数项，…………………… 9分

所以 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=(a_1+a_3+\cdots+a_{n-3}+a_{n-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_{n-2}+a_n)$

$=\dfrac{n}{2}\times1+\dfrac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2}\times4+\dfrac{4(1-4^{\frac{n}{2}})}{1-4}=\dfrac{n^2-n}{2}+\dfrac{2^{n+2}-4}{3}$．…………………… 11分

所以 $S_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+n}{2}+\dfrac{2^{n+1}-4}{3}, n\text{为奇数},\\[2mm]\dfrac{n^2-n}{2}+\dfrac{2^{n+2}-4}{3}, n\text{为偶数}.\end{cases}$ …………………… 12分

19.(1)证明:取 AC 的中点 D,连接 BD,C_1D,C_1A,则 $BD\perp AC$. …… 1分

因为 $CC_1=CA=2,\angle C_1CA=60°$,所以 $\triangle ACC_1$ 为等边三角形. …… 2分

又 D 为 AC 的中点,所以 $C_1D\perp AC$. …… 3分

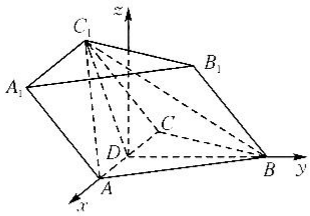
因为 $C_1D\cap BD=D$,$C_1D,BD\subset$ 平面 BDC_1,所以 $AC\perp$ 平面 BDC_1, …… 4分

又 $BC_1\subset$ 平面 BDC_1,所以 $AC\perp BC_1$. …… 5分

(2)解:由(1)知,$\angle C_1DB$ 为二面角 A_1-AC-B 的平面角,

所以 $\angle C_1DB=120°$. …… 6分

以 D 为坐标原点,分别以 DA,DB 为 x 轴,y 轴建立如图所示的空间直角坐标系,则



$D(0,0,0),A(1,0,0),C(-1,0,0),B(0,\sqrt{3},0),C_1\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$, …… 7分

所以 $\overrightarrow{CC_1}=\left(1,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right),\overrightarrow{CA}=(2,0,0),\overrightarrow{C_1B_1}=\overrightarrow{CB}=(1,\sqrt{3},0)$. …… 8分

设平面 ACC_1A_1 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x=0,\\ x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{3}{2}z=0,\end{cases}$ 令 $z=1$,得 $x=0,y=\sqrt{3}$,

所以平面 ACC_1A_1 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{3},1)$. …… 10分

设直线 B_1C_1 与平面 ACC_1A_1 所成角为 θ,则

$\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1B_1}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{C_1B_1}|}=\frac{3}{2\times2}=\frac{3}{4}$. …… 12分

20.(1)解:因为四点 $(-\sqrt{3},\sqrt{3}),(0,-\sqrt{3}),\left(1,-\frac{3}{2}\right),\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 中恰有三点在椭圆 C 上,且两点 $\left(1,-\frac{3}{2}\right),\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 关于 x 轴对称,所以 $\left(1,-\frac{3}{2}\right),\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 在椭圆 C 上,

所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$. …… 2分

若点 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ 也在 C 上,则 $\frac{3}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1$,与上式联立,无解,故 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ 不在 C 上,所以点 $(0,-\sqrt{3})$ 在 C 上,所以

$b=\sqrt{3}$,所以 $a=2$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …… 4分

(2)证明:设 $M(0,m)(m>0),N(0,n),P(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$,由题意知 $F(-1,0)$,

$\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$, …… 5分

所以 $\overrightarrow{PM}=(-x_0,m-y_0),\overrightarrow{PN}=(-x_0,n-y_0),\overrightarrow{FM}=(1,m),\overrightarrow{FN}=(1,n)$, …… 6分

因为 $PM\perp PN,FM\perp FN$,所以 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0,\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$,

即 $x_0^2+(m-y_0)(n-y_0)=0,1+mn=0,$ …………………………………………………………………… 8 分

所以 $4-\frac{4}{3}y_0^2+mn-(m+n)y_0+y_0^2=0,n=-\frac{1}{m},$

所以 $y_0^2+3\left(m-\frac{1}{m}\right)y_0-9=0,$

解得 $y_0=\frac{3}{m}$,或 $y_0=-3m$(舍). …………………………………………………………………… 10 分

由 $n=-\frac{1}{m}<0$ 得点 N 在 y 轴的负半轴上,

所以 $\left|\frac{PQ}{QN}\right|=\frac{y_0}{|n|}=\frac{\frac{3}{m}}{\left|-\frac{1}{m}\right|}=3$(定值). …………………………………………………… 12 分

21.(1)解:由题意知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$,

$f'(x)=-e^x-1+\cos x+\frac{t}{1+x}(x>-1)$, …………………………………………………………… 1 分

令 $g(x)=-e^x-1+\cos x+\frac{t}{1+x}(x>-1)$,则 $g'(x)=-e^x-\sin x-\frac{t}{(1+x)^2}(x>-1)$,

因为 $t=1$,当 $x\in(-1,0]$ 时,$-e^x<0,-\sin x\leqslant1,-\frac{1}{(1+x)^2}<-1$,所以 $g'(x)<0$,

当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$-e^x<-1,-\sin x\leqslant1,-\frac{1}{(1+x)^2}<0$,所以 $g'(x)<0$,

所以 $g(x)$(即 $f'(x)$)在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减, ………………………………………………………… 3 分

又 $f'(0)=0$,所以当 $x\in(-1,0)$ 时,$f'(x)>0$;当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$f'(x)<0$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,0)$,单调递减区间为 $(0,+\infty)$. ……………………………………… 4 分

(2)证明:由(1)知当 $t=1$ 时,$f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增,在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,所以 $f(x)\leqslant f(0)=0<2+\sqrt{2}$;

…… 5 分

若 $t>1$,当 $x\in(-1,0]$ 时,$-e^x<0,-\sin x\leqslant1,-\frac{t}{(1+x)^2}<-1$,所以 $g'(x)<0$,

当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$-e^x<-1,-\sin x\leqslant1,-\frac{t}{(1+x)^2}<0$,所以 $g'(x)<0$,

所以 $g(x)$(即 $f'(x)$)在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减, ………………………………………………………… 7 分

又 $f'(0)=t-1>0,f'(t-1)=-e^{t-1}+\cos(t-1)<0$,

所以存在 $x_0\in(0,t-1)$,使得 $f'(x_0)=0$, ………………………………………………………………… 8 分

所以当 $x\in(-1,x_0)$ 时,$f'(x)>0$;当 $x\in(x_0,+\infty)$,$f'(x)<0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-1,x_0)$ 上单调递增,在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减,

所以 $\forall x\in(-1,+\infty)$,$f(x)\leqslant f(x_0)=1-e^{x_0}-x_0+\sin x_0+t\ln(1+x_0)$. ………………………… 9 分

又由 $f'(x_0)=0$,得 $-e^{x_0}-1+\cos x_0+\frac{t}{1+x_0}=0$,即 $e^{x_0}=-1+\cos x_0+\frac{t}{1+x_0}$,

所以 $f(x_0)=2-x_0+\sin x_0-\cos x_0+t\ln(1+x_0)-\frac{t}{1+x_0}$.

因为 $x_0\in(0,t-1)$,所以 $2-x_0<2,\sin x_0-\cos x_0=\sqrt{2}\sin\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$,

$t\ln(1+x_0)<t\ln t,-\frac{t}{1+x_0}<0$,

所以 $f(x_0)=2-x_0+\sin x_0-\cos x_0+t\ln(1+x_0)-\frac{t}{1+x_0}<2+\sqrt{2}+t\ln t$. ………… 11 分

所以 $f(x)<2+\sqrt{2}+t\ln t$.

综上所述,$f(x)<2+\sqrt{2}+t\ln t$. ………… 12 分

22. 解:(1)由 $\rho=4\cos\theta$,得 $\rho^2=4\rho\cos\theta$, ………… 1 分

因为 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,$x=\rho\cos\theta$,所以 $x^2+y^2=4x$,

即 C 的直角坐标方程为 $(x-2)^2+y^2=4$, ………… 3 分

C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+2\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数).(答案不唯一,符合即可) ………… 5 分

(2)由(1)知曲线 C 为圆,且圆心的坐标为 $(2,0)$,半径为 2, ………… 6 分

所以圆心到 l 的距离 $d=\frac{|-2\sqrt{3}|}{2}=\sqrt{3}$,

所以 $|AB|=2\sqrt{4-(\sqrt{3})^2}=2$, ………… 8 分

所以△PAB 的面积的最大值为 $\frac{1}{2}|AB|(\sqrt{3}+2)=\sqrt{3}+2$. ………… 10 分

23. (1)解:由 $|x|+|x-3|\leqslant 5$,得 $\begin{cases}x\leqslant 0,\\ -x+3-x\leqslant 5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0<x\leqslant 3,\\ x+3-x\leqslant 5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>3,\\ x+x-3\leqslant 5,\end{cases}$ ………… 2 分

所以 $-1\leqslant x\leqslant 0$,或 $0<x\leqslant 3$,或 $3<x\leqslant 4$,

所以不等式 $|x|+|x-3|\leqslant 5$ 的解集为 $[-1,4]$, ………… 4 分

所以 $a=-1,b=4$. ………… 5 分

(2)证明:由(1)知 $a=-1,b=4$,所以 $4m+n-1=0$,即 $4m+n=1$, ………… 6 分

又 $m>0,n>0$,所以 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)(4m+n)=5+\frac{4m}{n}+\frac{n}{m}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{4m}{n}\cdot\frac{n}{m}}=9$, ………… 8 分

当且仅当 $\frac{4m}{n}=\frac{n}{m}$,即 $n=2m$ 时等号成立,此时 $m=\frac{1}{6},n=\frac{1}{3}$, ………… 9 分

所以 $m+n\geqslant 9mn$. ………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。