2022—2023学年度下学期高三年级第三次综合素养评价

数学试卷

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，共150分，考试时间120分钟.

第Ⅰ卷(选择题　共60分)

一、选择题(本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)来源：高三答案公众号

1. 设复数$z=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$，则在复平面内$\frac{z^2+1}{z}$对应的点位于　　(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 已知集合$A=\{(x,y)|xy=1\}$，$B=\{(x,y)|x\in\mathbf{Z},y\in\mathbf{Z}\}$，则$A\cap B$真子集的个数为　　(　　)

A. 3　　B. 16　　C. 15　　D. 1

3. 已知$a>0$且$a\neq1$，"函数$f(x)=a^x$为增函数"是"函数$g(x)=x^a$在$(0,+\infty)$上单调递增"的　　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 某校有5名大学生打算前往观看冰球、速滑、花滑三场比赛，每场比赛至少有1名学生且至多2名学生前往，则甲同学不去观看冰球比赛的方案种数是　　(　　)

A. 48　　B. 54　　C. 60　　D. 72

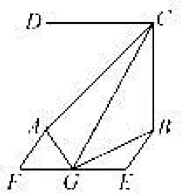
5. 公差不为0的等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=n^2a_1$，若$a_1,a_2,a_{k_1},a_{k_2},\cdots,a_{k_n}$依次成等比数列，则$k_3=$　　(　　)

A. 81　　B. 63　　C. 41　　D. 32

6. 在$\triangle ABC$中，$|AB|=3$，$|AC|=2$，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，则直线$AD$通过$\triangle ABC$的　　(　　)

A. 垂心　　B. 外心　　C. 重心　　D. 内心

7. 如图，平面$ABCD\perp$平面$ABEF$，四边形$ABCD$是正方形，四边形$ABEF$是矩形，且$AB=4$，$AF=1$，若G是线段EF上的动点，则三棱锥$C-ABG$的外接球表面积的最小值是　　(　　)



A. 16π　　B. 20π　　C. 32π　　D. 36π

8. 已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是夹角为$60°$的单位向量，若对任意的$x_1,x_2\in(m,+\infty)$，且$x_1<x_2$，$\frac{x_1\ln x_2-x_2\ln x_1}{x_1-x_2}<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则$m$的取值范围是　　(　　)

A. $[e^2,+\infty)$　　B. $[e,+\infty)$　　C. $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$　　D. $\left[\frac{1}{e},e\right)$

二、选择题(本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分)

9. 以下四个命题中,真命题有 ( )

A. 在回归分析中,可用相关指数 R^2 的值判断模型的拟合效果,R^2 越大,模型的拟合效果越好

B. 回归模型中残差是观测值 y_i 与预测值 $\hat{y}_i$ 的差,残差点所在的带状区域宽度越窄,说明模型拟合精度越高

C. 对分类变量 x 与 y 的统计量 χ^2 来说,χ^2 值越小,判断"x 与 y 有关系"的把握程度越大

D. 已知随机变量 X 服从二项分布 $B\left(n,\frac{1}{3}\right)$,若 $E(3X+1)=6$,则 $n=6$

10. 钱塘江沿多处出现罕见潮景"鱼鳞潮","鱼鳞潮"的形成需要两股涌潮,一股是波状涌潮,另外一股是破碎的涌潮,两者相遇交叉就会形成像鱼鳞一样的涌潮.若波状涌潮的图像近似函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A,\omega\in\mathbf{N}^*,|\varphi|<\frac{\pi}{3}\right)$ 的图像,而破碎的涌潮的图像近似 $f'(x)$($f'(x)$是函数 $f(x)$的导函数)的图像.已知当 $x=2\pi$ 时,两潮有一个交叉点,且破碎的涌潮的波谷为 -4,则 ( )

A. $\omega=2$

B. $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

C. $f'\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图像关于原点对称

D. $f'(x)$在区间$\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$上单调

11. 在棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F 分别为 AB,BC 的中点,则 ( )

A. 异面直线 DD_1 与 B_1F 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. 点 P 为正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 内一点,当 $DP\parallel$ 平面 B_1EF 时,DP 的最小值为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

C. 过点 D_1,E,F 的平面截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面周长为 $2\sqrt{13}+\sqrt{2}$

D. 当三棱锥 B_1-BEF 的所有顶点都在球 O 的表面上时,球 O 的表面积为 6π

12. 已知 F 是抛物线 $W:y^2=2px(p>0)$的焦点,点 $A(1,2)$在 W 上,过点 F 的两条互相垂直的直线 l_1,l_2 分别与 W 交于 B,C 和 D,E,过点 A 分别作 l_1,l_2 的垂线,垂足分别为 M,N,则 ( )

A. 四边形 $AMFN$ 面积的最大值为2

B. 四边形 $AMFN$ 周长的最大值为 $4\sqrt{2}$

C. $\frac{1}{|BC|}+\frac{1}{|DE|}$为定值$\frac{1}{2}$

D. 四边形 $BDCE$ 面积的最小值为32

第Ⅱ卷(非选择题　共90分)

三、填空题(本题共4小题,每小题5分,共20分)

13. $\left(x+\frac{1}{x}+2\right)^5$ 的展开式的常数项是________.

14. 已知点 $A(-1,1)$,$B(1,3)$,若线段 AB 与圆 $C:(x-1)^2+y^2=m$ 存在公共点,则 m 的取值范围为________.

15. 已知实数 $a>b>1$,满足 $a+\frac{1}{a-1}=b+\frac{1}{b-1}$,则 $a+4b$ 的最小值是________.

16. 若正实数 a,b 满足 $a(\ln b-\ln a+a)\geq be^{a-1}$,则$\frac{1}{ab}$的最小值为________.

四、解答题（本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（10分）

已知数列$\{a_n\}$满足$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{5n-1}{1+5n}$，$a_1=1$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$b_n=\frac{1}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}$，$T_n$为数列$\{b_n\}$的前$n$项和，求$T_n$.

18.（12分）

已知△ABC的内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$a=b+2b\cos C$.

(1)求证：$C=2B$；

(2)求$\frac{a+c}{b}$的取值范围.

19.（12分）

某社区对55位居民是否患有新冠肺炎疾病进行筛查，已知随机一人其口拭子核酸检测结果呈阳性的概率为2%，且每个人的口拭子核酸是否呈阳性相互独立.

(1)假设该疾病患病的概率是0.3%，且患病者口拭子核酸呈阳性的概率为98%，设这55位居民中有一位的口拭子核酸检测呈阳性，求该居民可以确诊为新冠肺炎患者的概率；

(2)根据经验，口拭子核酸检测采用分组检测法可有效减少工作量，具体操作如下：将55位居民分成若干组，先取每组居民的口拭子核酸混在一起进行检测，若结果显示阴性，则可断定本组居民没有患病，不必再检测；若结果显示阳性，则说明本组中至少有一位居民患病，需再逐个进行检测，现有两个分组方案：

方案一：将55位居民分成11组，每组5人；方案二：将55位居民分成5组，每组11人.

试分析哪一个方案的工作量更少？

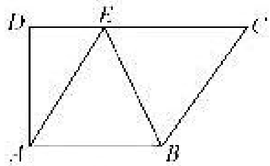
参考数据：$0.98^5\approx0.904$，$0.98^{11}\approx0.801$.

20.（12分）

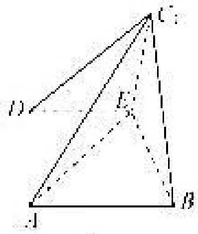
图1是直角梯形$ABCD$，$AB\parallel CD$，$\angle D=90^\circ$，四边形$ABCE$是边长为2的菱形，并且$\angle BCE=60^\circ$，以BE为折痕将$\triangle BCE$折起，使点C到达C_1的位置，且$AC_1=\sqrt{6}$.

(1)求证：平面$BC_1E\perp$平面$ABED$；

(2)在棱DC_1上是否存在点P，使得点P到平面ABC_1的距离为$\frac{\sqrt{15}}{5}$？若存在，求出直线EP与平面ABC_1所成角的正弦值；若不存在，请说明理由.



1



2

21.（12分）

已知双曲线W：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，点$N(0,b)$，右顶点是$M$，且$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MF_2}=-1$，$\angle NMF_2=120^\circ$.

(1)求W的方程；

(2)过点$Q(0,-2)$的直线l交W的右支于A、B两个不同的点（B在A、Q之间），若点$H(7,0)$在以线段AB为直径的圆的外部，试求$\triangle AQH$与$\triangle BQH$面积之比λ的取值范围.

22.（12分）

已知λ为正实数，函数$f(x)=\ln(\lambda x+1)-\lambda x+\frac{x^2}{2}(x\geq 0)$.

(1)若$f(x)>0$恒成立，求λ的取值范围；

(2)求证：$2\ln(n+1)-\frac{5}{3}<\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{i}-\frac{1}{i^2}\right)<2\ln(n+1)(n\in\mathbf{N},n\geq 2)$.