

银川一中 2023 届高三年级第四次月考

理科数学

注意事项：

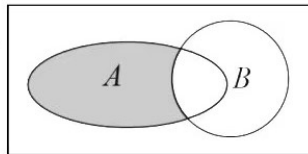
1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 作答时，务必将答案写在答题卡上。写在本试卷及草稿纸上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1. 若全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ， $B = \{x | x \leq 3\}$ ，

则图中阴影部分表示的集合为

- A. $\{3, 4, 5, 6\}$ B. $\{0, 1, 2\}$
C. $\{0, 1, 2, 3\}$ D. $\{4, 5, 6\}$



2. 设 i 是虚数单位，则复数 $\frac{2i}{1-i}$ 在复平面内所对应的点位于

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2=4$ ， $a_4=16$ ，则 a_2 与 a_4 的等比中项为

- A. 8 B. 10 C. ± 8 D. ± 10

4. 设 l 是直线， α ， β 是两个不同的平面，则下列说法正确的是

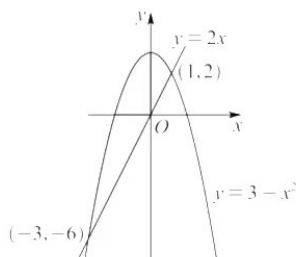
- A. 若 $l \parallel \alpha$ ， $l \parallel \beta$ ，则 $\alpha \parallel \beta$ B. 若 $l \parallel \alpha$ ， $l \perp \beta$ ，则 $\alpha \perp \beta$
C. 若 $\alpha \perp \beta$ ， $l \perp \alpha$ ，则 $l \parallel \beta$ D. 若 $\alpha \perp \beta$ ， $l \parallel \alpha$ ，则 $l \perp \beta$

5. “ $n=1$ ”是“幂函数 $f(x) = (n^2 - 3n + 3) \cdot x^{n^2 - 3n}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数”的一个 () 条件

- A. 充分不必要 B. 必要不充分
C. 充要 D. 既不充分也不必要

6. 图中阴影部分的面积是

- A. $2\sqrt{3}$ B. $9 - 2\sqrt{3}$ C. $\frac{32}{3}$ D. $\frac{35}{3}$

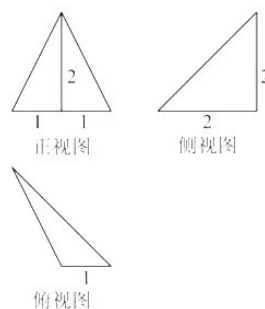


7. 已知函数 $f(x) = a(\ln x - 1) - x (a \in \mathbf{R})$ 在区间 $(e, +\infty)$ 内有最值，则实数 a 的取值范围是

- A. $(e, +\infty)$ B. $\left(\frac{e}{2}, +\infty\right)$ C. $(-\infty, e]$ D. $(-\infty, -e)$

8. 如图为一个三棱锥的三视图, 则该三棱锥的体积为

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{4}{3}$



9. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,

$\angle A = \frac{\pi}{3}$, AD 是 $\angle A$ 的角平分线, $AD = \sqrt{3}$, $AB > 1$,

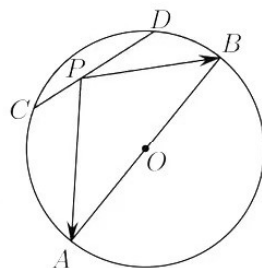
则 $b + 2c$ 的最小值是

- A. 6 B. $3 - 2\sqrt{2}$ C. $3 + 2\sqrt{2}$ D. 10

10. 圆是中华民族传统文化的形态象征, 象征着“圆满”和“饱满”,

是自古以和为贵的中国人所崇拜的图腾. 如图, AB 是圆 O 的一条直径, 且 $|AB| = 4$. C, D 是圆 O 上的任意两点, $|CD| = 2$, 点 P 在线段 CD 上, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围是

- A. $[-1, 2]$ B. $[\sqrt{3}, 2]$ C. $[3, 4]$ D. $[-1, 0]$



11. 已知 $\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \pi$, $\pi \leq \beta \leq \frac{3\pi}{2}$, $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{2}}{10}$, 则 $\beta - \alpha =$

- A. $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{3}{4}\pi$ D. $\frac{5\pi}{4}$

12. 设 $a = \frac{\sqrt{5}}{20}$, $b = \frac{1}{9}$, $c = 10\sin 0.01$, 则

- A. $b < a < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. 函数 $f(x) = e^x + ax$ 在 $x = 0$ 处的切线与直线 $2x - y - 5 = 0$ 平行, 则实数 $a =$ _____.

14. 已知向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, 且 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = -2$, 则向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 _____.

15. 已知函数 $f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$ ($\omega > 0$), 将 $f(x)$ 的图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 已知 $g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上恰有 5 个零点, 则 ω 的取值范围是 _____.

16. 已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上, $SA \perp$ 平面 ABC , $SA = 2$, 若球 O 的表面积为 16π , 则三棱锥 $S-ABC$ 的体积的最大值为 _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (本小题 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_{n+1} = S_n + a_n + 1$ ，_____。请在

① $a_1 + a_7 = 13$ ；② a_1, a_3, a_7 成等比数列；③ $S_{10} = 65$ ，这三个条件中任选一个补充在上面题干中，并解答下面问题。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n = a_n - 1$ 求数列 $\{2^n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

18. (本小题 12 分)

如图 1 是半圆 D (以 AB 为直径) 与 $\text{Rt}\triangle ABC$ 组合成的平面图，其中 $\angle BAC = 90^\circ$ ，图 2 是将半圆 D 沿着直径折起得到的，且半圆 D 所在平面与 $\text{Rt}\triangle ABC$ 所在平面垂直，点 E 是 $\widehat{AB}$ 的中点。

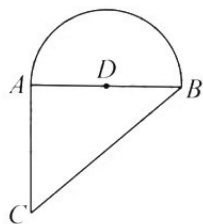


图1

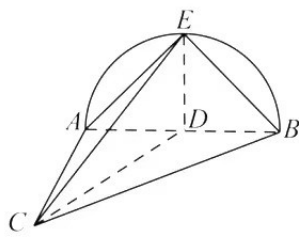


图2

(1) 求证： $BE \perp CE$ ；

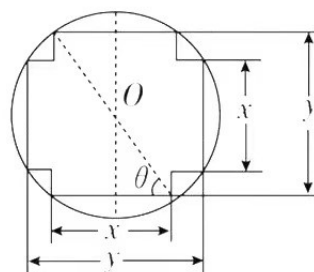
(2) 若 $BC = 2AC = 4$ ，求二面角 $E-BC-D$ 的平面角的正切值。

19. (本小题 12 分)

如图，在直径为 1 的圆 O 中，作一关于圆心对称、邻边互相垂直的十字形，其中 $y > x > 0$ 。

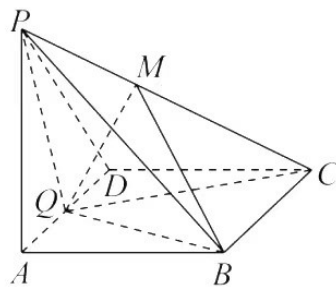
(1) 将十字形的面积表示成 θ 的函数；

(2) 求当 θ 为何值时有十字形面积的最大值，并求出最大值。



20. (本小题 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$, Q 为 AD 的中点, $PA = PD = AD = 2$.



(1) 点 M 在线段 PC 上, $PM = \frac{1}{3}PC$,

求证: $PA \parallel$ 平面 MQB ;

(2) 在 (1) 的条件下, 若 $PB = \sqrt{6}$, 求直线 PD 和平面 MQB 所成角的大小.

21. (本小题 12 分)

已知函数 $f(x) = xe^x - a(\ln x + x)$ ($a \in \mathbb{R}$)

(1) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = m$ 有两个实根, 求 m 取值范围;

(2) 若方程 $f(x) = 0$ 有两个实根 x_1, x_2 , 且 $x_1 \neq x_2$, 证明: $e^{x_1+x_2} > \frac{e^2}{x_1x_2}$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) (选修 4-4: 坐标系与参数方程)

已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的非

负半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 + 3\rho^2 \sin^2 \theta = 4$.

(1) 求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 已知直线 l 与曲线 C 相交于 P, Q 两点, 点 M 的直角坐标为 $(-1, 0)$, 求 $|MP| + |MQ|$.

23. (本小题满分 10 分) (选修 4-5: 不等式选讲)

已知 a, b, c 均为正数, 且 $2a + b + c = 1$, 证明:

(1) 若 $b = c$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 8$;

(2) $4a^2 + b^2 + 9c^2 \geq \frac{9}{19}$.

又 $\because AC \cap AE = A$, $AC \subset$ 平面 ACE , $AE \subset$ 平面 ACE ,
 $\therefore BE \perp$ 平面 ACE , 又 $\because CE \subset$ 平面 ACE ,
 $\therefore BE \perp CE$; 6 分

(2) $\because AB$ 为直径且点 E 是 $\widehat{AB}$ 的中点

$\therefore \triangle ABE$ 为等腰直角三角形

又 点 D 为 AB 的中点

$\therefore DE \perp AB$

又 平面与 $ABE \perp$ 平面 ABC 且平面与 $ABE \cap$ 平面 $ABC = AB$

$\therefore DE \perp$ 平面 ABC 8 分

则过点 E 做 BC 的垂线交 BC 于点 H , 连接 DH ,

得 $\angle DHE$ 为二面角 $E-BC-D$ 的平面角 10 分

又因在 $Rt\triangle EHD$ 中 $DH = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $DE = \sqrt{3}$

$\therefore \tan \angle DHE = \frac{DE}{DH} = 2$

即: 二面角 $E-BC-D$ 的平面角的正切值为 2. 12 分

19. 解: (1) 设十字形面积为 S ,

如图所示: $x = \cos \theta, y = \sin \theta$

所以 $S = xy + x \cdot \frac{y-x}{2} \times 2 = 2xy - x^2$,

$= 2 \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta, \left(\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 6 分

(2) $S = 2 \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta$,

$= \sin 2\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta - \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{5}}{2} \times \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \sin 2\theta - \frac{\sqrt{5}}{5} \cos 2\theta \right) - \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{5}}{2} \times \sin(2\theta - \varphi) - \frac{1}{2}$ (设 φ 为锐角且 $\tan \varphi = \frac{1}{2}$),

当 $\sin(2\theta - \varphi) = 1$, 即 $2\theta - \varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, S 最大.

即当 $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$ 时, 十字形取得最大面积, $S_{\max} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 12 分

20. 解: (1) 证明: 连接 AC 交 BQ 于 N , 连接 MN ,

因为 $AQ \parallel BC$, 所以 $\triangle ANQ \sim \triangle CNB$,

所以 $\frac{AQ}{BC} = \frac{AN}{NC} = \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}$, 又 $PM = \frac{1}{3}PC$,

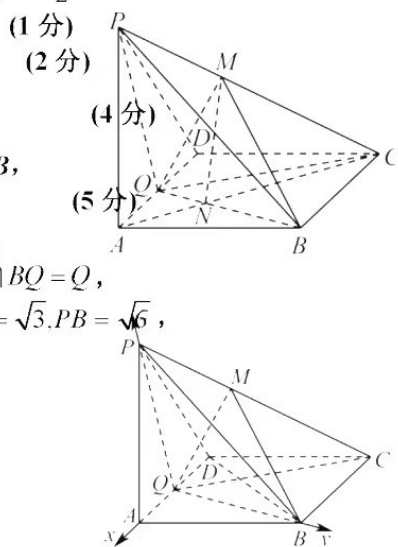
所以 $PA \parallel MN$, 因为 $PA \not\subset$ 平面 MQB , $MN \subset$ 平面 MQB ,
 所以 $PA \parallel$ 平面 MQB ;

(2) 连接 BD , 由题意 $\triangle ABD, \triangle PAD$ 都是等边三角形,

因为 Q 是 AD 中点, 所以 $PQ \perp AD, BQ \perp AD$, 又 $PQ \cap BQ = Q$,

$PQ, BQ \subset$ 平面 PQB , 所以 $AD \perp$ 平面 PQB , $PQ = BQ = \sqrt{3}, PB = \sqrt{6}$,

在 $\triangle PQB$ 中, $PQ^2 + BQ^2 = PB^2$, 所以 $\angle PQB = \frac{\pi}{2}$,



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线