2023年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练

文科数学

本试卷总分150分，考试时间120分钟。

注意事项：

1、答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|y=\sqrt{-|x|+2}\}$，$B=\{y|y=x^2-2x+2\}$，则 $A\cap B=$

A. $[-2,2]$　　B. $[0,+\infty)$　　C. $[1,2]$　　D. $[0,2]$

2. 已知 $(1+2i)\bar{z}=9+3i$，则 z 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知 D 为△ABC 所在平面内一点，$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$，$E$ 为 AC 边的中点，则

A. $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}$　　B. $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$　　C. $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}$　　D. $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

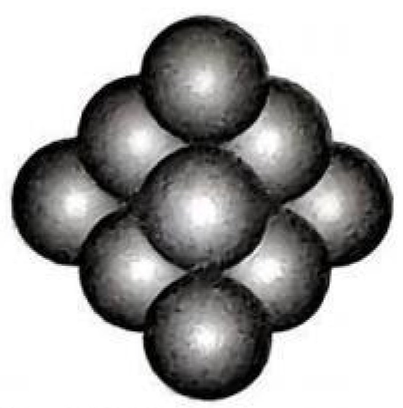
4. 已知 $\tan(\alpha+15°)=7\tan(\alpha-15°)$，则 $\sin(\alpha-15°)\cos(\alpha+15°)=$

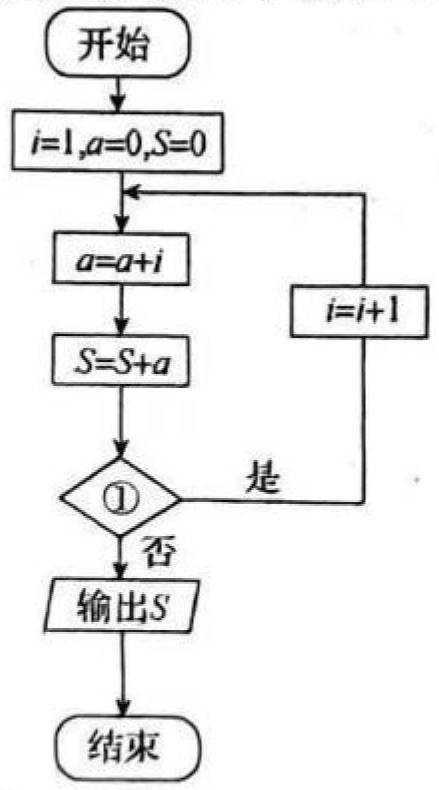
A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{7}{12}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{12}$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=-1$，$n(a_{n+1}-a_n)=\frac{2}{n+1}$。记 $\langle a_n\rangle$ 为不小于 a_n 的最小整数，$b_n=\langle a_n\rangle$，则数列 $\{b_n\}$ 的前2 023项和为

A. 2 020　　B. 2 021　　C. 2 022　　D. 2 023

6. 南宋时期的数学家杨辉所著的《详解九章算法》中有一个如图所示的"三角垛"问题，在"三角垛"的最上层放有一个球，第二层放有3个球，第三层放有6个球，……依此规律，其相应的程序框图如图所示.若输出的 S 的值为56，则程序框图中①处可以填入





A. $i<4$　　B. $i<5$　　C. $i<6$　　D. $i<7$

7. 净水机通过分级过滤的方式使自来水逐步达到纯净水的标准，其工作原理中有多次的 PP 棉滤芯过滤，其中第一级过滤一般由孔径为5微米的 PP 棉滤芯(聚丙烯熔喷滤芯)构成，其结构是多层式，主要用于去除铁锈、泥沙、悬浮物等各种大颗粒杂质.假设每一层 PP 棉滤芯可以过滤掉三分之一的大颗粒杂质，若过滤前水中大颗粒杂质含量为80 mg/L，现要满足过滤后水中大颗粒杂质含量不超过2 mg/L，则 PP 棉滤芯的层数最少为(参考数据：$\lg 2\approx0.30$，$\lg 3\approx0.48$)

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

8. 在一个正方体内放置一个最大的圆锥，使圆锥的底面在正方体的底面上，圆锥的顶点在正方体的上底面内，记正方体的体积为 V_1，圆锥的体积为 V_2，则 $V_1:V_2$ 约为(注：$\pi\approx3$)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

9. 已知 $a=\log_4 8$，$b=\frac{e^2}{4}$，$c=\frac{e^{2\,023}}{2\,023^2}$，则

A. $c<b<a$　　B. $a<b<c$　　C. $a<c<b$　　D. $b<a<c$

10. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，若 $f\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=-f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$，$f\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=f\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$，且 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调，则 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ 的值为

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

11. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，以 F_1F_2 为直径的圆与双曲线在第二象限的部分交于点 P，若双曲线上的点 Q 满足 $\overrightarrow{F_1P}=\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2Q}$，则双曲线的离心率为

A. $\frac{\sqrt{37}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{35}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{37}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}xe^x, x<0,\\ -x^2+2x, x\geqslant0,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f^2(x)-(2+t)f(x)+2t=0$ 有3个不同的实数根，则实数 t 的取值范围为

A. $\left(-\infty,-\frac{1}{e}\right)$　　B. $\left(-\frac{1}{e},0\right)$　　C. $\left[-\frac{1}{e},1\right]$　　D. $(-e,2)$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知圆 $O:x^2+y^2=4$ 与圆 $C:(x-1)^2+(y-3)^2=4$，直线 $l:2x-y+4=0$ 交圆 O 于 A，B 两点，交圆 C 于 D，E 两点，M，N 分别为 AB，DE 的中点，则 $|MN|=$________.

14. 已知实数 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant0,\\ 2x+y-2\leqslant0,\\ x-2y-1\leqslant0,\end{cases}$ 则 $z=2x-y$ 的最小值为________.

15. 已知单位向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})=-\frac{22}{3}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为________.

16. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，过点 F 的直线 l 交抛物线于 A，B 两点，AB 的中点为 P，以 AB 为直径的圆与 y 轴交于 M，N 两点，则∠MPN 有________值(填最大或最小)，此时 $\sin\angle MPN=$________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17.(12 分)

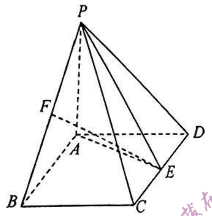
记等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，已知 $a_3=5$，$a_2>0$，且 $S_6=(a_2+1)S_3$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\left\{\frac{n+S_n}{3^n}\right\}$的前 n 项和 T_n.

18.(12 分)

如图，四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle ABC=60^\circ$，$AP=AB$，$PB=2\sqrt{2}$，平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$，E，F 分别为 CD，PB 的中点.

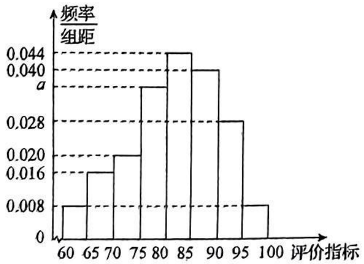


(1)证明：$CD\perp$平面 PAE；

(2)求点 A 到平面 PEF 的距离.

19.(12 分)

某乒乓球教练决定检验学员某项技能的水平，随机抽取 100 位学员进行测试，并根据该项技能的评价指标，按[60,65)，[65,70)，[70,75)，[75,80)，[80,85)，[85,90)，[90,95)，[95,100]分成 8 组，得到如图所示的频率分布直方图.



(1)求 a 的值，并估计该项技术的评价指标的中位数(精确到 0.1)；

(2)根据频率分布直方图求样本评价指标的平均数(同一组的数据用该组区间的中点值作代表)，若平均数与中位数之差的绝对值小于 1，则认为该项技能的水平有显著稳定性；否则不认为有显著稳定性，请依数据给出答案；

(3)在选取的 100 位学员中，其中训练时间不少于 1 年的(记为 A 队)与少于 1 年的(记为 B 队)人数相同，若规定评价指标不低于 80 为优秀，低于 80 为良好，经统计训练时间不少于 1 年的有 40 个学员评价指标为优秀，请列出 2×2 列联表，并判断是否有 99%的把握认为"评价指标是否优秀与训练时间有关".

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.010
k_0	2.706	3.841	6.635

20.(12 分)

已知椭圆 C：$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点分别为 A，B，长轴长为短轴长的 2 倍，点 P 在 C 上运动，且$\triangle ABP$ 面积的最大值为 8.

(1)求 C 的方程；

(2)若直线 l 经过点 $Q(1,0)$，交 C 于 M，N 两点，直线 AM，BN 分别交直线 $x=4$ 于 D，E 两点，试问$\triangle ABD$ 与$\triangle AQE$ 的面积之比是否为定值？若是，求出该定值；若不是，说明理由.

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=(a-1)x+\ln x$，$g(x)=\frac{1}{2}ax^2(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性；

(2)当 $a>2$ 时，证明：函数 $\varphi(x)=g(x)-f(x)$有两个不同的零点.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.[选修 4—4：坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=2-t,\\y=3+t\end{cases}$($t$ 为参数).以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2+4\rho\sin\theta+12-a=0(a>8)$.

(1)求 l 的普通方程和 C 的直角坐标方程；

(2)当 l 与 C 有公共点时，求实数 a 的取值范围.

23.[选修 4—5：不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=2|x+2|-|x-5|$.

(1)求不等式 $f(x)\geqslant 4$ 的解集；

(2)若 $f(x)\geqslant a^2+2a-10$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.