

2023届陕西省第四次模拟考试

文科数学

试卷满分:150分 考试时间:120分钟

注意事项:

1. 答题前,考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚,将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 全部答案在答题卡上完成,答在本试题上无效。
3. 回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案用0.5mm黑色笔迹签字笔写在答题卡上。
4. 考试结束后,将本试题和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U = \mathbb{R}$, 集合 $A = \{x \mid |x - 1| < 1\}$, $B = \{x \mid x^2 + x \geq 0\}$, 则 $(C_U A) \cup (C_U B) =$ ()
A. $[0, 2]$ B. $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$
C. $(0, 2)$ D. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
2. 已知复数 z 满足 $z \cdot (3 + 2i) = -1 + 3i$, 则 z 的虚部为
A. $\frac{11}{13}$ B. $\frac{3}{13}$ C. $-\frac{3}{13}$ D. $-\frac{11}{13}$
3. 2021年,我国全年货物进出口总额391009亿元,比上年增长21.4%。其中,出口217348亿元,增长21.2%;进口173661亿元,增长21.5%。货物进出口顺差43687亿元,比上年增长7344亿元。如图是我国2017—2021年货物进出口总额统计图,则下面结论中不正确的是 ()



- A. 2020年的货物进出口总额322215亿元
- B. 2020年的货物进出口顺差36343亿元
- C. 2017—2021年,货物进口总额逐年上升
- D. 2017—2021年,货物出口总额逐年上升

4. 丹麦化学家索伦森是首位建立PH值概念的生物学家,他把PH值定义为 $\text{PH} = -\lg [H^+]$, 式子中的 $[H^+]$ 指的是溶液中的氢离子的浓度,单位为摩尔/升 (mol/L),若某种溶液中的氢离子的浓度为 6×10^{-8} mol/L,则该溶液的PH值约为 ($\ln 6 \approx 0.78$) ()

A. 8 B. 7.78 C. 7.22 D. 6

5. 已知直线 $l: \sqrt{2}x - y - \sqrt{2} = 0$ 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点,点 A, B 到 x 轴的距离分别为 m, n , 则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} =$ ()

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

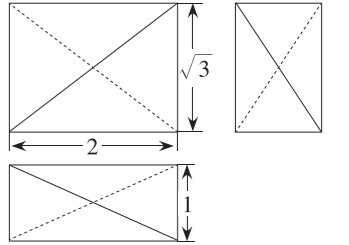
6. 已知单位向量 \vec{e}_1, \vec{e}_2 的夹角为 $\theta (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$, 且向量 $2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 与 $\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$ 的夹角为 120° , 则 $\theta =$ ()

A. $\frac{5\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

7. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $a = 3, b = 4, c = \sqrt{13}$, 点 D, E 分别是边 BC, BA 的中点,且 AD, CE 交于点 O , 则四边形 $BDOE$ 的面积为 ()

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{4\sqrt{3}}{5}$
C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

8. 右图为某四面体的三视图,则该几何体的表面积为 ()

A. $6\sqrt{2}$
B. $2\sqrt{19}$
C. $4\sqrt{5}$
D. $2\sqrt{21}$ 

9. 已知函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$, ($\omega > 0, -\pi < \varphi < 0$), $f(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 $f(x)$ 在 $[0, 100\pi]$ 上恰有50个零点, 则 ω 的取值范围是 ()

A. $[\frac{38}{75}, \frac{31}{60})$ B. $(\frac{38}{75}, \frac{31}{60}]$ C. $[\frac{149}{300}, \frac{38}{75})$ D. $(\frac{149}{300}, \frac{38}{75}]$

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - 20n + 29$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前50项和为 ()

A. 2022 B. 1800 C. 1700 D. 1691

11. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左,右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 的直线与 C 交于 A, B 两点,且 $\vec{AF_2} = 2\vec{F_2B}$, $\angle ABF_1 = 60^\circ$, 则双曲线 C 的离心率为 ()

A. $\frac{7}{3}$ B. 2 C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

12. 设 $a = \log_6 4, b = \log_5 5, c = \log_3 \pi$, 则 ()

A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x + y - 1 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, 则 $y - 2x$ 的最大值为_____.

14. 某高中数学兴趣小组有男生3人, 女生2人, 从中选取3人参加数学竞赛, 则这3人中恰有2个男生的概率为_____.

15. 在四棱锥 $S - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, 平面 $SAC \perp$ 平面 $ABCD$, $\cos \angle SAC = -\frac{1}{3}$, $SC = 4$, 则四棱锥 $S - ABCD$ 外接球的表面积为_____.

16. 关于函数 $f(x) = 3 \cos x - \frac{2}{\cos x}$ 有如下四个命题:

① $f(x)$ 的定义域是 $\{x | x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\}$;

② $f(x)$ 图象关于 y 轴对称;

③ $f(x)$ 的图象关于点 $(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0)$, $k \in Z$ 对称;

④ $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递增.

其中所有真命题的序号是_____.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答，第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共60分.

17. (12分) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1 = -3$, $2a_{n+1} = 3a_n + 4$.

(1) 证明：数列 $\{a_n + 4\}$ 为等比数列;

(2) 求 S_n 的最小值.

18. (12分) 2022年2月4日—2月20日, 北京冬奥会顺利召开, 全民关注冬奥赛事. 为了更好的普及冬奥知识, 某中学举办了冬奥知识竞赛, 并随机抽取了100名学生的成绩, 且这100名学生的成绩(单位: 分)都在 $[50, 100]$, 其频数分布表如下图所示.

成绩(单位: 分)	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)	[90, 100]
人数	6	4	a	b	18

由分布表得知该中学冬奥知识竞赛成绩的中位数的估计值为82分.

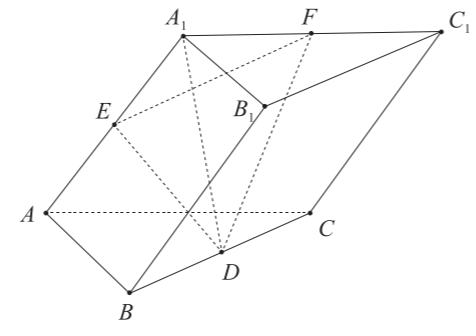
(1) 求 a, b 的值;

(2) 该中学冬奥知识竞赛成绩的平均数与标准差的估计值 (同一组中的数据用该组区间的中点值为代表). (参考数据: $\sqrt{26} \approx 5.1$)

密 封 线

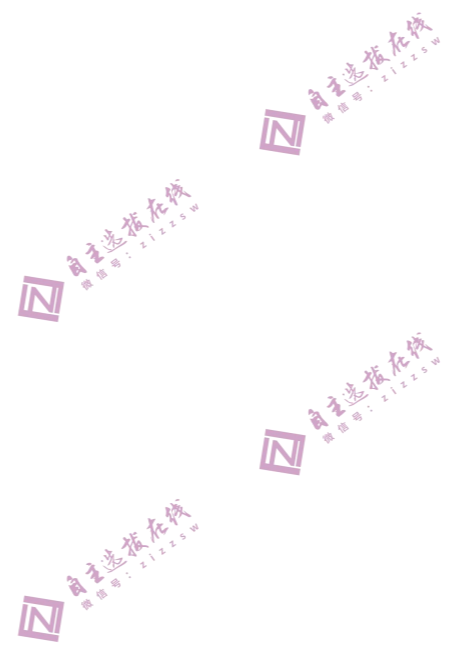
19. (12分) 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 = AC = 2$, $\angle A_1AC = 60^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$, 点 D, E, F 分别为线段 BC, AA_1, A_1C_1 的中点, 且 $BC \perp A_1D$.

- (1) 证明: 平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 ABC ;
- (2) 若 $AB = 1$, 求三棱锥 $A_1 - DEF$ 的体积.



20. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上点 $P(1, \frac{3}{2})$ 与圆 $x^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = 1$ 上点 M 的距离的最大值为 $\sqrt{a} + 1$.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 动直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 且以 AB 为直径的圆过点 $Q(0, \sqrt{3})$ (Q 与 A, B 不重合), 证明: 动直线 l 过定点, 并求出该定点坐标.



21 (12分) . 已知函数 $f(x) = ax \ln x - 2x$, $a \in R$.

- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 证明: 当 $a = 1$ 时, $f(x) + f(e^x) + 2e > 0$.

23.[选修4-5: 不等式选讲] (10分)

已知函数 $f(x) = |x^2 - 3a^2 - 3| + |x^2 - a - 1|$, $a \in R$.

- (1) 当 $a = 0$ 时, 解不等式 $f(x) \leq 4$;
- (2) 若 $f(x) \geq 2$, 求 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共10分. 请考生在第22、23题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22.[选修4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在平面直角坐标系 xOy 中, $A(-2, 0)$, $B(1, 0)$, 动点 $P(x, y)$ 满足 $|PA| = 2|PB|$, 动点 P 的轨迹为曲线 C .

- (1) 写出曲线 C 的一个参数方程;
- (2) 求 $|PA| \cdot |PB|$ 的取值范围.