

# 南通市 2022 届高三第三次调研测试

## 数 学

本试卷共 6 页，22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

- 注意事项：1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。将条形码横贴在答题卡“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

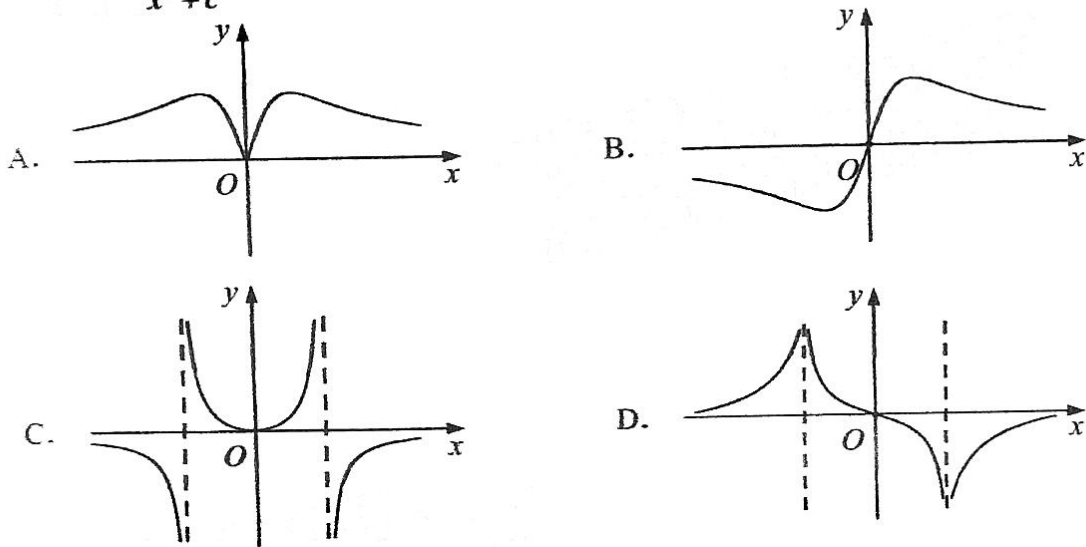
一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $M = \{1, 4, x\}$ ,  $N = \{1, x^2\}$ , 若  $N \subseteq M$ , 则实数  $x$  组成的集合为
- A.  $\{0\}$                       B.  $\{-2, 2\}$                       C.  $\{-2, 0, 2\}$                       D.  $\{-2, 0, 1, 2\}$
2. 已知复数  $z = (a+1) - ai$  ( $a \in \mathbf{R}$ ), 则  $a = -1$  是  $|z| = 1$  的
- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                      D. 既不充分也不必要条件
3. 已知  $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ , 则  $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) =$
- A.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$                       B.  $-\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. 关于椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ), 有下面四个命题:
- 甲: 长轴长为 4;                      乙: 短轴长为 2;  
丙: 离心率为  $\frac{1}{2}$ ;                      丁: 右准线的方程为  $x = 4$ .
- 如果只有一个假命题, 则该命题是
- A. 甲                      B. 乙                      C. 丙                      D. 丁

5. 正多面体共有5种, 统称为柏拉图体, 它们分别是正四面体、正六面体(即正方体)、正八面体、正十二面体、正二十面体. 连接正方体中相邻面的中心, 可以得到另一个柏拉图体. 已知该柏拉图体的体积为 $\frac{32}{3}$ , 则生成它的正方体的棱长为

A. 2                      B.  $2\sqrt{2}$                       C.  $2\sqrt[3]{4}$                       D. 4

6. 函数  $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+c}$  ( $a, b, c \in \mathbf{R}$ ) 的图象可能是



7. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过  $F_1$  且垂直于  $x$  轴的直线与  $C$  交于  $M, N$  两点,  $MF_2$  与  $y$  轴交于点  $P$ , 以  $MN$  为直径的圆经过点  $P$ , 则  $C$  的离心率为

A.  $\sqrt{5}$                       B. 2                      C.  $\sqrt{3}$                       D.  $\sqrt{2}$

8. 已知  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  叫做双曲余弦函数,  $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  叫做双曲正弦函数. 若关于  $x$  的不等式  $mf(x)g(x) - e[mf(x) + g(x)] + e^2 \leq 0$  在  $[-1, 1]$  上恒成立, 则实数  $m$  的取值范围是

A.  $[-x, \frac{2e^2}{e^2+1}]$                       B.  $(-\infty, e]$                       C.  $[\frac{2e^2}{e^2+1}, +\infty)$                       D.  $[e, +\infty)$

二、选择题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分.

9. 从装有5只红球、5只白球的袋中任意取出3只球, 下列各对事件为对立事件的有

- A. “取出 2 只红球和 1 只白球”与“取出 1 只红球和 2 只白球”  
 B. “取出 3 只红球”与“取出的 3 只球中至少有 1 只白球”  
 C. “取出 3 只红球”与“取出 3 只白球”  
 D. “取出的 3 只球中至少有 2 只红球”与“取出的 3 只球中至少有 2 只白球”

10. 已知函数  $y = x + e^x$  的零点为  $x_1$ ,  $y = x + \ln x$  的零点为  $x_2$ , 则

- A.  $x_1 + x_2 > 0$       B.  $x_1 x_2 < 0$       C.  $e^{x_1} + \ln x_2 = 0$       D.  $x_1 x_2 - x_1 + x_2 < 1$

11. 已知圆台  $OO_1$  上、下底面的半径分别为 2 和 4, 母线长为 4. 正四棱台上底面  $A_1B_1C_1D_1$  的四个顶点在圆台上底面圆周上, 下底面  $ABCD$  的四个顶点在圆台下底面圆周上, 则

- A.  $AA_1$  与底面所成的角为  $60^\circ$   
 B. 二面角  $A_1 - AB - C$  小于  $60^\circ$   
 C. 正四棱台  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的外接球的表面积为  $64\pi$   
 D. 设圆台  $OO_1$  的体积为  $V_1$ , 正四棱台  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的体积为  $V_2$ , 则  $\frac{V_1}{V_2} = \pi$

12. 已知各项都是正数的数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $S_n = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2a_n}$ , 则

- A.  $\{S_n^2\}$  是等差数列      B.  $S_n + S_{n-2} < 2S_{n+1}$   
 C.  $a_{n+1} > a_n$       D.  $S_n - \frac{1}{S_n} \geq \ln n$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知向量  $a = (6, 2)$ , 与  $a$  共线且方向相反的单位向量  $b =$  .

14. 写出一个同时具有下列性质①②③的函数  $f(x) =$  .

①  $f(x)$  是定义域为  $\mathbf{R}$  的奇函数; ②  $f(1+x) = f(1-x)$ ; ③  $f(1) = 2$  .

15. 抽样表明, 某地区新生儿体重  $X$  近似服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ . 假设随机抽取  $r$  个新生儿体检, 记  $\xi$  表示抽取的  $r$  个新生儿体重在  $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$  以外的个数. 若  $\xi$  的数学期望  $E(\xi) < 0.05$ , 则  $r$  的最大值是.

16. 一曲线族的包络线 (Envelope) 是这样的曲线: 该曲线不包含于曲线族中, 但过该曲线上的每一点, 都有曲线族中的一条曲线与它在这一点处相切. 若圆  $C_1: x^2 + y^2 = 1$  是直线族  $ax + by - 1 = 0 (a, b \in \mathbf{R})$  的包络线, 则  $a, b$  满足的关系式为\_\_\_\_\_; 若曲线  $C_2$  是直线族  $(1-t^2)x + 2ty - 2t - 4 = 0 (t \in \mathbf{R})$  的包络线, 则  $C_2$  的长为\_\_\_\_\_.
- (第一空 2 分, 第二空 3 分)

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2}b + a \cos B = c$ . 从条件①、②中找出能使得  $\triangle ABC$  唯一确定的条件, 并求边  $BC$  上的高  $h$ .

条件①  $a = 2, \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; 条件②  $a = \sqrt{7}, b = \sqrt{3}$ .

18. (12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 各项均为正数的数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项积为  $T_n$ , 且  $S_n = 2a_n - 1, b_1 = a_1, T_n = (a_n b_n)^n$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

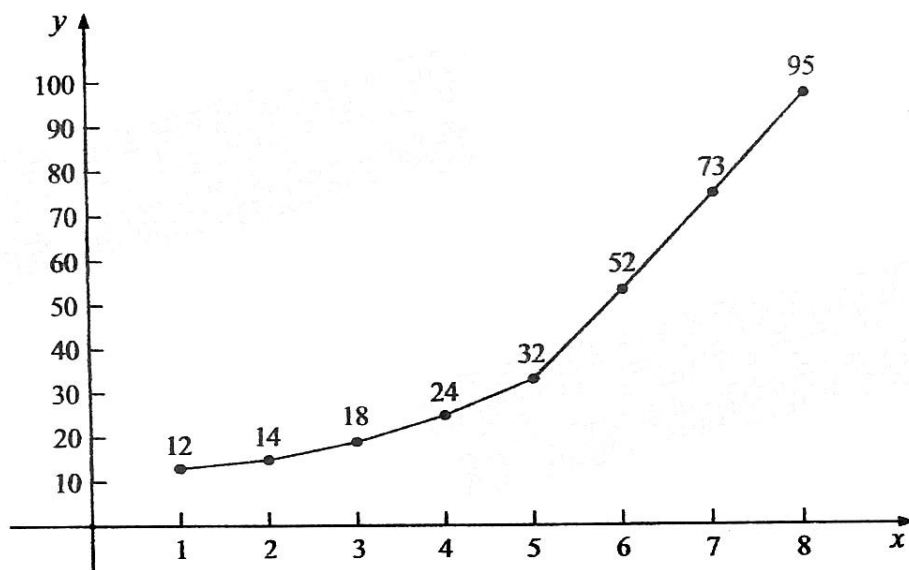
(2) 证明:  $\{b_n\}$  为等比数列.





19. (12分)

8年来,某地第  $x$  年的第三产业生产总值  $y$  (单位:百万元)统计图表如下图所示.根据该图提供的信息解决下列问题.



(1) 在所统计的8个生产总值中任取2个,记其中不低于平均值的个数为  $X$ ,求  $X$  的分布列和数学期望  $E(X)$ ;

(2) 由统计图表可看出,从第5年开始,该地第三产业生产总值呈直线上升趋势,试用线性回归模型预测该地第10年的第三产业生产总值.

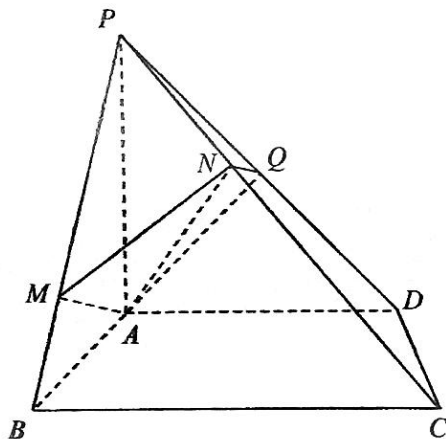
(参考公式:  $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$ ,  $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$ )



20. (12分)

如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ,  $AD \parallel BC$ ,  $AB \perp BC$ . 点  $M$  在棱  $PB$  上,  $PM = 2MB$ , 点  $N$  在棱  $PC$  上,  $PA = AB = AD = \frac{2}{3}BC = 2$ .

- (1) 若  $CN = 2NP$ ,  $Q$  为  $PD$  的中点, 求证:  $A, M, N, Q$  四点共面;
- (2) 求直线  $PA$  与平面  $AMN$  所成角的正弦的最大值.



21. (12分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知抛物线  $E: y^2 = 2px (p > 0)$  和点  $H(3, 4)$ . 点  $Q$  在  $E$  上, 且  $\overline{OQ} = \frac{3}{4}\overline{OH}$ .

- (1) 求  $E$  的方程;
- (2) 若过点  $H$  作两条直线  $l_1, l_2$ ,  $l_1$  与  $E$  相交于  $A, B$  两点,  $l_2$  与  $E$  相交于  $C, D$  两点, 线段  $AB, CD$  中点的连线的斜率为  $k$ , 直线  $AB, CD, AD, BC$  的斜率分别为  $k_1, k_2, k_3, k_4$ .
- 证明:  $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4}$ , 且  $\frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4} - \frac{1}{k}$  为定值.

22. (12分)

设函数  $f(x) = e^x + a \sin x - ax^2 - (1+a)x$ .

- (1) 当  $a \leq 0$  时, 讨论  $f(x)$  的单调性;
- (2) 若  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 求  $a$ .

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

