

湖湘名校教育联合体·2023年下学期高一10月联考·数学

参考答案、提示及评分细则

1. B 因为 $P = \{1, 2, 3, 4\}$, $Q = \{-2, -1, 0, 2, 5\}$, 所以 $P \cap Q = \{2\}$. 故选 B.
2. D “ $\forall x > 0, 2x^2 + x > 0$ ”的否定为“ $\exists x > 0, 2x^2 + x \leq 0$ ”, 故选 D.
3. C 不等式可化为 $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) > 0$, 解得 $x < -1$ 或 $x > 2$. 故选 C.
4. A $a=0$ 可以推出 $ab=0$, 但 $ab=0$, 则 a 不一定为 0. 故选 A.
5. D 因为 $A = \{x | 4x+3 < 15\} = \{x | x < 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, 所以 $A \cap B = \{1, 2\}$, 所以 $A \cap B$ 的真子集的个数为 $2^2 - 1 = 3$, 故选 D.
6. C 当 $a=0, b=-1, c=-2$ 时, 满足 $a > b > c$, 不满足 $ab > ac$, 故 A 错误;
当 $a=1, b=0, c=-2$ 时, 满足 $a > b > c$, 不满足 $a^2 > c^2$, 故 B 错误;
因为 $a > b$, 所以 $a-b > 0$, 因为 $b > c$, 所以 $|c-b| > 0$, 所以 $(a-b)|c-b| > 0$, 故 C 正确;
当 $a=2, b=1, c=0$ 时, 满足 $a > b > c$, 不满足 $a|c| > b|c|$, 故 D 错误. 故选 C.
7. A 因为 $ax-b < 0$ 的解集是 $\left\{x \mid x > \frac{1}{2}\right\}$, 所以 $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ 且 $a < 0$, 由 $\frac{ax+b}{2x+3} > 0$, 得 $(ax+b)(2x+3) > 0$, 即 $\left(x + \frac{b}{a}\right)(2x+3) < 0$, 解得 $-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$, 即关于 x 的不等式 $\frac{ax+b}{2x+3} > 0$ 的解集是 $\left\{x \mid -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}\right\}$. 故选 A.
8. D 因为 $4a^2 - ab + b^2 - c = 0$, 所以 $c = 4a^2 - ab + b^2$, 所以 $\frac{c}{ab} = \frac{4a^2 - ab + b^2}{ab} = \frac{4a}{b} + \frac{b}{a} - 1 \geq 2\sqrt{\frac{4a}{b} \cdot \frac{b}{a}} - 1 = 3$, 当且仅当 $\frac{4a}{b} = \frac{b}{a}$, 即 $b = 2a$ 时等号成立, 所以 $a + 2b - c = a + 2 \times 2a - [4a^2 - a \times 2a + (2a)^2] = -6a^2 + 5a = -6\left(a - \frac{5}{12}\right)^2 + \frac{25}{24}$, 所以 $a + 2b - c$ 的最大值为 $\frac{25}{24}$. 故选 D.
9. AB 由集合的无序性知 $A=B$, 故 A 选项正确;
一个数的平方为非负数, 故 B 选项正确;
 $x^2 + 1 \geq 1$, 故 C 选项错误;
由集合的真子集的概念可知 $N \subsetneq M$, 故 D 选项错误. 故选 AB.
10. AB 因为 $m < 3$ 可以推出 $m < 4$, 但是 $m < 4$ 不可以推出 $m < 3$, 所以“ $m < 4$ ”是“ $m < 3$ ”的必要不充分条件, 故 A 正确;
因为 $x < 2$ 且 $y < 3$ 可以推出 $x+y < 5$, 但是 $x+y < 5$ 不可以推出 $x < 2$ 且 $y < 3$, 所以“ $x < 2$ 且 $y < 3$ ”是“ $x+y < 5$ ”的充分不必要条件, 故 B 正确;
因为 $\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$, 解得 $a < 0$ 或 $a > 2$, 所以“ $a > 2$ ”是“ $\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$ ”的充分不必要条件, 故 C 错误;
当 $c=0$ 时, $ac^2 = bc^2$, 所以“ $a < b$ ”是“ $ac^2 < bc^2$ ”的必要不充分条件, 故 D 错误. 故选 AB.
11. AC 当 $a > 0, \Delta = b^2 - 8092a < 0$ 时满足题意, 故 A 正确; $x=0$ 时不等式成立, 解集不可能为空, 故 B 错误; 当 $a=0, b=-2023$ 时, 解集恰为 $(-\infty, 1)$, 满足题意, 故 C 正确; $x=0$ 时不等式成立, 解集中有元素 0, 故 D 错误. 故选 AC.
12. ABD $xy = \frac{1}{2} \cdot 2xy \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$, 当且仅当 $2x=y$, 即 $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{2}$ 时等号成立, 故 A 正确;
因为 $2x+y=1$, 所以 $y=1-2x, 0 < y < 1$, 所以 $x^2 + y^2 = x^2 + (1-2x)^2 = 5x^2 - 4x + 1 = 5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}$, 所以 $x^2 + y^2$ 的最小值为 $\frac{1}{5}$, 此时 $x = \frac{2}{5}, y = \frac{1}{5}$, 故 B 正确;
 $x(x+y) \leq \left(\frac{x+x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{2x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 当且仅当 $x=x+y$, 即 $x=\frac{1}{2}, y=0$ 时等号成立, 又 x, y 是正数, 故

等号不成立,故 C 错误;

对于 D, $\frac{x+2y}{2xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2y}\right)(2x+y) = \frac{5}{2} + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq \frac{5}{2} + 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}} = \frac{9}{2}$, 当且仅当 $\frac{y}{x} = \frac{x}{y}$, 即 $x=y = \frac{1}{3}$ 时等号成立,故 D 正确. 故选 ABD.

13. $-\frac{7}{4}$ 因为集合 $A = \{2\sqrt{a}-1, -3\}, B = \{b+1, 2\}, A=B$,

所以 $\begin{cases} 2\sqrt{a}-1=2, \\ b+1=-3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=\frac{9}{4}, \\ b=-4, \end{cases}$ 从而 $a+b = -\frac{7}{4}$.

14. $(0, 6)$ 显然有 $2x+y = (x-y) + (x+2y)$, $\therefore 2x+y \in (0, 6)$.

15. 8160 设长为 x , 宽为 y , 则 $xy \cdot 3 = 48$, 则 $xy = 16$,

总造价 $= (6x+6y) \cdot 120 + 16 \times 150 = 720(x+y) + 2400 \geq 720 \times 2\sqrt{xy} + 2400 = 8160$.

当且仅当 $x=y=4$ 时取得等号.

16. $-\frac{5}{6}$ 10 $\because ax^2 + bx + c < 0$ 的解集为 $\{x | 2 < x < 3\}$, $\therefore a > 0, 2+3 = -\frac{b}{a}, 2 \times 3 = \frac{c}{a}$, $\therefore b = -5a, c = 6a$, $\therefore \frac{b}{c} = -\frac{5}{6}$,

$\therefore b+c + \frac{36}{a+2} = a + \frac{36}{a+2} = (a+2) + \frac{36}{a+2} - 2 \geq 2\sqrt{(a+2) \cdot \frac{36}{a+2}} - 2 = 10$, 当且仅当 $a+2 = \frac{36}{a+2}$, 即 $a=4$ 时取等号, 故 $b+c + \frac{36}{a+2}$ 的最小值为 10.

17. 解: (1) 因为集合 $A = \{x | 1 \leq x < 4\}, B = \{x | 2 < x < 7\}$, 所以 $A \cup B = \{x | 1 \leq x < 7\}$; 5 分
(2) $\complement_{\mathbf{R}} A = \{x | x < 1 \text{ 或 } x \geq 4\}$, 所以 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = \{x | 4 \leq x < 7\}$ 10 分

18. 解: (1) 若命题 p 为真命题, 则 $x^2 > 3-2m$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 因此 $3-2m < 0$, 解得 $m > \frac{3}{2}$.

因此, 实数 m 的取值范围是 $\left\{m \mid m > \frac{3}{2}\right\}$; 6 分

(2) 若命题 q 为真命题, 则 $\Delta = (-2m)^2 - 4(m+2) > 0$, 即 $m^2 - m - 2 > 0$, 解得 $m < -1$ 或 $m > 2$.

因此, 实数 m 的取值范围是 $\{m | m < -1 \text{ 或 } m > 2\}$; 9 分
若命题 p, q 至少有一个为真命题,

可得 $\left\{m \mid m > \frac{3}{2}\right\} \cup \{m | m < -1 \text{ 或 } m > 2\} = \left\{m \mid m < -1 \text{ 或 } m > \frac{3}{2}\right\}$.

所以实数 m 的取值范围是 $\left\{m \mid m < -1 \text{ 或 } m > \frac{3}{2}\right\}$ 12 分

19. 解: (1) 集合 $A = \{x | -1 \leq x+1 \leq 5\} = \{x | -2 \leq x \leq 4\}, C = \{x | a-2 < x < a+2\}$, 2 分
“ $x \in C$ ”是“ $x \in A$ ”的充分条件,

$\therefore \begin{cases} a+2 \leq 4, \\ a-2 \geq -2, \end{cases}$ 4 分

解得 $0 \leq a \leq 2$, 5 分

\therefore 实数 a 的取值范围是 $\{a | 0 \leq a \leq 2\}$; 6 分

(2) \because 集合 $A = \{x | -1 \leq x+1 \leq 5\} = \{x | -2 \leq x \leq 4\}, B = \{x | -3 < x \leq 1\}, C = \{x | a-2 < x < a+2\}$, 8 分

$\therefore A \cap B = \{x | -2 \leq x \leq 1\}, (A \cap B) \subseteq C$,

$\therefore \begin{cases} a-2 < -2, \\ a+2 > 1, \end{cases}$ 10 分

解得 $-1 < a < 0$, 11 分

\therefore 实数 a 的取值范围是 $\{a | -1 < a < 0\}$ 12 分

20. 解:(1)因为 $a+b-ab=0$, 所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 1分

所以 $2a+3b = (2a+3b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 5 + \frac{3b}{a} + \frac{2a}{b} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{3b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} = 5 + 2\sqrt{6}$, 4分

当且仅当 $\frac{3b}{a} = \frac{2a}{b}$, 即 $a = \frac{2+\sqrt{6}}{2}, b = \frac{3+\sqrt{6}}{3}$ 时, 等号成立, 5分

所以 $2a+3b$ 的最小值为 $5+2\sqrt{6}$; 6分

(2) 因为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 所以 $1 - \frac{1}{a} + 1 - \frac{1}{b} = 1$, 7分

所以 $\frac{4a}{a-1} + \frac{b}{b-1} = \frac{4}{1-\frac{1}{a}} + \frac{1}{1-\frac{1}{b}} = \left[\frac{4}{1-\frac{1}{a}} + \frac{1}{1-\frac{1}{b}}\right] \left(1 - \frac{1}{a} + 1 - \frac{1}{b}\right) = 5 + \frac{4\left(1-\frac{1}{b}\right)}{1-\frac{1}{a}} + \frac{1-\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{b}} \geq 5 +$

$2\sqrt{\frac{4\left(1-\frac{1}{b}\right)}{1-\frac{1}{a}} \cdot \frac{1-\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{b}}} = 9$, 10分

当且仅当 $1 - \frac{1}{a} = 2\left(1 - \frac{1}{b}\right)$, 即 $b = \frac{3}{2}, a = 3$ 时等号成立, 11分

所以 $\frac{4a}{a-1} + \frac{b}{b-1}$ 的最小值为 9. 12分

21. 解:(1)由题意知 $A = \{x | (x-1)(x-4) > 0\} = \{x | x > 4 \text{ 或 } x < 1\}$, 1分

当 $m=1$ 时, $B = \{x | x^2 - 4x < 0\} = \{x | 0 < x < 4\}$, 2分

所以 $A \cap B = \{x | 0 < x < 1\}$; 4分

(2)由题意知 $B = \{x | x^2 - (3m+1)x + 2(m-1)(m+3) < 0\} = \{x | (x-2m+2)(x-m-3) < 0\}$, 6分

当 $2m-2 = m+3$, 即 $m=5$ 时, $B = \emptyset$, 所以 $A \cap B = \emptyset$, 符合题意; 7分

当 $2m-2 > m+3$, 即 $m > 5$ 时, $B = \{x | m+3 < x < 2m-2\}$,

又 $A \cap B = \emptyset$, 所以 $\begin{cases} m+3 \geq 1, \\ 2m-2 \leq 4, \end{cases}$ 解得 $-2 \leq m \leq 3$, 所以无解; 9分

当 $2m-2 < m+3$, 即 $m < 5$ 时, $B = \{x | 2m-2 < x < m+3\}$,

又 $A \cap B = \emptyset$, 所以 $\begin{cases} 2m-2 \geq 1, \\ m+3 \leq 4, \end{cases}$ 所以无解. 11分

综上, m 的值为 5. 12分

22. 解:(1)因为 $x^2 + 3x - 4 > 0$, 解得 $x < -4$ 或 $x > 1$.

若 $a=6$, 则 $3x^2 + 11x - 42 < 0$, 解得 $-6 < x < \frac{7}{3}$,

所以 $A = \{-5, 2\}$; 4分

(2)由 $3x^2 + (3a-7)x - 7a < 0$, 得 $(x+a)(3x-7) < 0$, 5分

当 $a = -\frac{7}{3}$ 时, $(x+a)(3x-7) < 0$ 无解, 此时不满足 $A = \{2\}$, 不符合题意; 7分

当 $-a > \frac{7}{3}$, 即 $a < -\frac{7}{3}$ 时, 由 $(x+a)(3x-7) < 0$, 解得 $\frac{7}{3} < x < -a$,

又 $x < -4$ 或 $x > 1$. 所以 $\frac{7}{3} < x < -a$, 此时不满足 $A = \{2\}$, 不符合题意; 9分

当 $-a < \frac{7}{3}$, 即 $a > -\frac{7}{3}$ 时, 由 $(x+a)(3x-7) < 0$, 解得 $-a < x < \frac{7}{3}$,

要使 $A = \{2\}$, 则 $-5 \leq -a < 2$, 即 $-2 < a \leq 5$, 11分

综上, a 的取值范围是 $\{a | -2 < a \leq 5\}$ 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

