哈师大附中 2021 级高三第二次调研考试

数学试题

1.【答案】D

2. 【答案】A

3. 【答案】B

4. 【答案】D

5. 【答案】A

6. 【答案】B

7. 【答案】C

8.【答案】A

9. 【答案】BC

10. 【答案】BD

11.【答案】BCD

12. 【答案】ABD

13. 【答案】$\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】先由函数是幂函数求出 m 的值，再对 m 进行讨论即可.

【详解】由题意函数 $f(x)=(2m^2-7m+7)x^m$ 是幂函数，所以 $2m^2-7m+7=1$，

即 $2m^2-7m+6=0$，解得 $m=2$ 或 $m=\frac{3}{2}$，

当 $m=2$ 时，$f(x)=x^2$ 是偶函数，不满足题意，

当 $m=\frac{3}{2}$ 时，$f(x)=x^{\frac{3}{2}}=\sqrt{x^3}$，其定义域为 $(0,+\infty)$，不关于原点对称，

即 $f(x)=\sqrt{x^3}$ 是非奇非偶函数，满足题意.

故答案为：$\frac{3}{2}$.

14.【答案】$\left(0,\frac{4}{3}\right]$

【解析】

【分析】结合复合函数单调性的判断方法和对数真数大于零可构造不等式组求得结果.

【详解】$\because y=\log_{\frac{1}{2}}u$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore$ 若 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(4-ax)$ 在 $(2,3)$ 上单调递增，

则 $u=4-ax$ 在 $(2,3)$ 上单调递减且 $u>0$ 在 $(2,3)$ 上恒成立，

$\therefore \begin{cases} a>0 \\ 4-3a\ge 0 \end{cases}$，解得 $0<a\le\frac{4}{3}$，

即实数 a 的取值范围为 $\left(0,\frac{4}{3}\right]$.

故答案为：$\left(0,\frac{4}{3}\right]$.

15. 【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】利用向量的数量积的定义及向量的模公式，结合二次函数的性质即可求解.

【详解】因为 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$，

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{2\pi}{3}=2\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-3$.

所以 $|\vec{a}+x\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+x\vec{b})^2}=\sqrt{|\vec{a}|^2+2x\vec{a}\cdot\vec{b}+x^2|\vec{b}|^2}=\sqrt{4-6x+9x^2}=\sqrt{9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+3}$，

当 $x=\frac{1}{3}$ 时，$|\vec{a}+x\vec{b}|$ 的值最小.

故答案为：$\frac{1}{3}$.

16.【答案】$\frac{7\sqrt{13}}{13}$

【解析】

【分析】用正弦定理将 $BC+3AC$ 转化求得最大值，根据 $C=\frac{\pi}{3}$ 用余弦定理联立方程组即可求解.

【详解】设 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，

$\because c=\sqrt{3}$，$C=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2$，

$\therefore a+3b=2\sin A+6\sin B$，

$\therefore a+3b=2\sin A+6\sin(A+C)$，

$\therefore a+3b=2\sin A+6\sin(A+\frac{\pi}{3})$，

$\therefore a+3b=5\sin A+3\sqrt{3}\cos A$，

$\therefore a+3b=2\sqrt{13}(A+\varphi)$，其中 $\cos\varphi=\frac{5}{2\sqrt{13}}$，

$\because \sin\varphi>0$，$\cos\varphi>0$，$A\in(0,\frac{2\pi}{3})$，

$\therefore$ 当 $A+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)$ 时 $a+3b$ 取最大值 $2\sqrt{13}$，

$\because C=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$，

$\therefore \begin{cases} a+3b=2\sqrt{13} \\ \frac{a^2+b^2-3}{2ab}=\frac{1}{2} \end{cases}$，

$\therefore b_1=b_2=\frac{7\sqrt{13}}{13}$，

即 AC 的值为 $\frac{7\sqrt{13}}{13}$.

17. 【答案】（1）$\frac{119}{169}$

（2）$\frac{63}{65}$

【解析】

【分析】（1）根据终边所过点可得 $\sin\alpha,\cos\alpha$，利用诱导公式和二倍角余弦公式可求得结果；

（2）根据角的范围和同角三角函数平方关系可求得 $\cos(\alpha-\beta)$，由 $\cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]$，利用两角和差余弦公式可求得结果.

【小问 1 详解】

$\because$ 角 α 的终边过点 $A(-5,-12)$，$\therefore \sin\alpha=-\frac{12}{\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}}=-\frac{12}{13}$，$\cos\alpha=-\frac{5}{\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}}=-\frac{5}{13}$，

$\therefore \sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)=-\cos 2\alpha=1-2\cos^2\alpha=1-2\times\frac{25}{169}=\frac{119}{169}$.

【小问 2 详解】

$\because \alpha \in (0,2\pi)$，$\sin\alpha<0$，$\cos\alpha<0$，$\therefore \alpha \in \left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$；

$\because \beta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore -\beta \in \left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，$\therefore \alpha-\beta \in \left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，$\therefore \cos(\alpha-\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha-\beta)}=-\frac{3}{5}$，

$\therefore \cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)$

$=\left(-\frac{5}{13}\right)\times\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{12}{13}\right)\times\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{63}{65}$.

18. 【答案】（1）$\frac{\sqrt{21}}{21}$

（2）证明见解析，直线 FC 到平面 AEC_1 的距离为 $\frac{2\sqrt{21}}{21}$

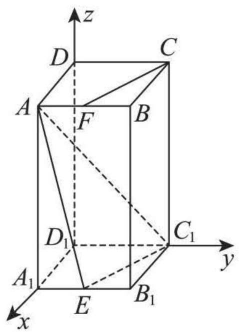
【解析】

【分析】（1）以 D_1 为坐标原点建立空间直角坐标系，利用线面角的向量求法可求得结果；

（2）根据 $\overrightarrow{FC}\cdot\vec{n}=0$，由线面平行的向量证明可得结论；将所求距离转化为点 F 到平面 AEC_1 的距离，由点面距离的向量求法可求得结果.

【小问 1 详解】

以 D_1 为坐标原点，$\overrightarrow{D_1A_1},\overrightarrow{D_1C_1},\overrightarrow{D_1D}$ 正方向为 x,y,z 轴正方向，可建立如图所示空间直角坐标系，



则 $A(1,0,2)$，$E\left(1,\frac{1}{2},0\right)$，$C_1(0,1,0)$，$B_1(1,1,0)$，$B(1,1,2)$，

$\therefore \overrightarrow{AE}=\left(0,\frac{1}{2},-2\right)$，$\overrightarrow{AC_1}=(-1,1,-2)$，$\overrightarrow{B_1B}=(0,0,2)$，

设平面 AEC_1 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\vec{n}=\dfrac{1}{2}y-2z=0\\ \overrightarrow{AC_1}\cdot\vec{n}=-x+y-2z=0\end{cases}$，令$y=4$，解得：$x=2$，$z=1$，$\therefore\vec{n}=(2,4,1)$，

$\therefore\left|\cos\left\langle\overrightarrow{B_1B},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{B_1B}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{B_1B}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{2}{2\times\sqrt{21}}=\dfrac{\sqrt{21}}{21}$，

即直线BB_1与平面AEC_1所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{21}}{21}$.

【小问2详解】

由（1）知：$F\left(1,\dfrac{1}{2},2\right)$，$C(0,1,2)$，$\therefore\overrightarrow{FC}=\left(-1,\dfrac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{FA}=\left(0,-\dfrac{1}{2},0\right)$，

$\because\overrightarrow{FC}\cdot\vec{n}=-1\times2+\dfrac{1}{2}\times4+0\times1=0$，$\therefore\overrightarrow{FC}\perp\vec{n}$，

又$FC\not\subset$平面AEC_1，$\therefore FC//$平面AEC_1，

$\therefore$直线FC到平面AEC_1的距离即为点F到平面AEC_1的距离，设该距离为d，

则$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{FA}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{2}{\sqrt{21}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{21}$，即直线$FC$到平面$AEC_1$的距离为$\dfrac{2\sqrt{21}}{21}$.

19. 【答案】（1）$a_n=2n-1$

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）利用等差数列通项和求和公式可构造方程组求得a_1,d，由此可得通项公式；

（2）由（1）可得b_n，采用裂项相消法可求得S_n，进而分析得到结论.

【小问1详解】

设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

则$\begin{cases}a_2+a_4=2a_3=2a_1+4d=10\\ S_4=4a_1+\dfrac{4\times3}{2}d=4a_1+6d=16\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a_1=1\\ d=2\end{cases}$，

$\therefore a_n=1+2(n-1)=2n-1$.

【小问2详解】

由（1）得：$b_n=\dfrac{n+1}{3^{n+1}(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{(2n-1)3^n}-\dfrac{1}{(2n+1)3^{n+1}}\right]$，

$\therefore S_n=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1\times3^1}-\frac{1}{3\times3^2}+\frac{1}{3\times3^2}-\frac{1}{5\times3^3}+\frac{1}{5\times3^3}-\frac{1}{7\times3^4}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)3^n}-\frac{1}{(2n+1)3^{n+1}}\right]$

$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{(2n+1)3^{n+1}}\right]=\frac{1}{12}-\frac{1}{(8n+4)3^{n+1}}$，

$\because\frac{1}{(8n+4)3^{n+1}}>0$，$\therefore S_n<\frac{1}{12}$.

20. 【答案】（1）$A=\frac{2\pi}{3}$

（2）27

【解析】

【分析】（1）利用正弦定理化角为边，再根据余弦定理即可得解；

（2）根据$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$求出$b,c$的关系，再利用基本不等式即可得解.

【小问 1 详解】

因为$(a+b)(\sin A-\sin B)=c(\sin B+\sin C)$，

由正弦定理得$(a+b)(a-b)=c(b+c)$，即$a^2-b^2=bc+c^2$，

$c^2+b^2-a^2=-bc$，

所以$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}$，

又$A\in(0,\pi)$，所以$A=\frac{2\pi}{3}$；

【小问 2 详解】

由$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC$，得$\angle BAD=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，

因为$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，

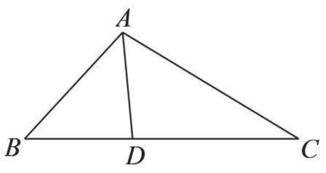
所以$\frac{1}{2}bc\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}c\cdot3\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}b\cdot3\cdot\sin\frac{\pi}{3}$，

即$bc=3(c+b)$，$\frac{b+c}{bc}=\frac{3}{c}+\frac{3}{b}=1$，

所以$4b+c=(4b+c)\left(\frac{3}{c}+\frac{3}{b}\right)=15+\frac{12b}{c}+\frac{3c}{b}\geq15+2\sqrt{\frac{12b}{c}\cdot\frac{3c}{b}}=27$，

当且仅当$\frac{12b}{c}=\frac{3c}{b}$，即$c=2b=9$时等号成立，

所以$4b+c$的最小值为27.



21. 【答案】(1) $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2},\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$

(2) $\left(-\infty,-\dfrac{5}{4}\right)\cup\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{5}{4},+\infty\right)$

【解析】

【分析】(1)利用双曲线的渐近线及点在双曲线上，将直线与双曲线联立方程组，利用直线与双曲线相交的条件及韦达定理，结合点在双曲线的左支的条件即可求解；

(2)将直线与双曲线联立方程组，利用直线与双曲线相交的条件及韦达定理，再利用中点坐标公式及直线的点斜式方程，结合三角形的面积公式及一元二次不等式的解法可得答案.

【小问 1 详解】

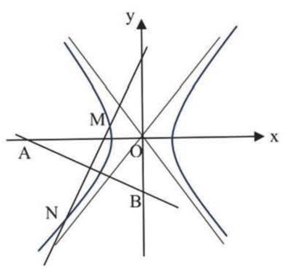
$\because \dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，且 $\dfrac{5}{a^2}-\dfrac{5}{4b^2}=1$，

$\therefore a=2$，$b=\sqrt{5}$，

故双曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$，

设 $M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$，

当直线 l 过点 $(0,1)$ 时，$t=1$，直线 l 的方程为 $y=kx+1$，如图所示



由 $\begin{cases} y=kx+1 \\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1 \end{cases}$，得 $\left(5-4k^2\right)x^2-8kx-24=0$，

由 $5-4k^2 \neq 0$，$\Delta = 64k^2 + 96\left(5-4k^2\right) > 0$，解得 $-\frac{\sqrt{6}}{2} < k < \frac{\sqrt{6}}{2}$ 且 $k \neq \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$，

$x_1 + x_2 = \frac{8k}{5-4k^2}$，$x_1 x_2 = \frac{-24}{5-4k^2}$.

因为点 M，N 都在左支上，$\therefore x_1 < 0$，$x_2 < 0$，

$\therefore x_1 + x_2 = \frac{8k}{5-4k^2} < 0$，$x_1 x_2 = \frac{-24}{5-4k^2} > 0$，所以 $\frac{\sqrt{5}}{2} < k < \frac{\sqrt{6}}{2}$.

所以 k 的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

【小问 2 详解】

将 $y = kx + t$ 代入 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 并整理得 $\left(5-4k^2\right)x^2 - 8ktx - 4t^2 - 20 = 0$，

由 $5-4k^2 \neq 0$，$\Delta = \left(-8kt\right)^2 + 4\left(5-4k^2\right)\left(4t^2+20\right) > 0$，得 $t^2 + 5 - 4k^2 > 0$，

$x_1 + x_2 = \frac{8kt}{5-4k^2}$，$x_1 x_2 = \frac{-4t^2-20}{5-4k^2}$，

设线段 MN 的中点为 $\left(x_0, y_0\right)$，则 $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{4kt}{5-4k^2}$，$y_0 = kx_0 + t = \frac{5t}{5-4k^2}$，

所以线段 MN 的垂直平分线的方程为 $y - \frac{5t}{5-4k^2} = -\frac{1}{k}\left(x - \frac{4kt}{5-4k^2}\right)$，

所以 A 点的坐标为 $\left(\frac{9kt}{5-4k^2}, 0\right)$，$B$ 点的坐标为 $\left(0, \frac{9t}{5-4k^2}\right)$，

因为 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{81}{2}$，所以 $\frac{1}{2}\left|\frac{9kt}{5-4k^2}\right| \cdot \left|\frac{9t}{5-4k^2}\right| = \frac{81}{2}$，整理得 $t^2 = \frac{\left(5-4k^2\right)^2}{|k|}$，

所以 $\frac{\left(5-4k^2\right)^2}{|k|} + 5 - 4k^2 > 0$，

所以 $\left(4k^2-5\right)\left(4k^2-|k|-5\right) > 0$，解得 $0 < |k| < \frac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $|k| > \frac{5}{4}$，

所以 k 的取值范围为 $\left(-\infty, -\frac{5}{4}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$.

22. 【答案】(1) $2x - y - 1 = 0$

(2) $\left(0, 1\right]$

【解析】

【分析】（1）利用导数几何意义可求得切线斜率 $f'(1)$，结合 $f(1)=1$ 可得切线方程；

（2）方法一：构造 $g(x)=f(x)-a-a\ln a$，将问题转化为 $g(x)\geq 0$ 恒成立；利用导数和零点存在定理可说明 $g(x)$ 的单调性，得到 $\dfrac{1}{x_0}-2\ln x_0-x_0\geq 0$；令 $u(x)=\dfrac{1}{x}-2\ln x-x$，利用导数可得 $u(x)$ 单调性，从而确定 x_0 的范围，再次构造函数 $t(x)=xe^{x-1}(0<x\leq 1)$，利用导数可求得 $t(x_0)$ 的范围，即为所求的 a 的取值范围；

方法二：采用同构法，将恒成立的不等式化为 $xe^{x-1}\geq[\ln(ax)+1]e^{[\ln(ax)+1]-1}$，构造函数 $h(x)=xe^{x-1}(x>0)$，利用导数求得 $h(x)$ 单调性，从而得到 $x\geq\ln(ax)+1$，采用分离变量法可得 $a\leq\dfrac{e^{x-1}}{x}(x>0)$，令 $u(x)=\dfrac{e^{x-1}}{x}(x>0)$，利用导数可求得 $u(x)_{\min}$，由此可得 a 的取值范围；

方法三：由恒成立不等式可确定 $f(1)=1\geq a+a\ln a$，构造函数 $S(a)=a+a\ln a$，利用导数可求得 $S(a)$ 的单调性，结合 $S(1)=1$ 可求得 a 的范围为 $(0,1]$；通过证明当 $a\in(0,1]$ 时，$f(x)\geq a+\ln a$ 恒成立和 $a>1$ 时，不等式不恒成立可得到最终范围.

【小问 1 详解】

当 $a=-1$ 时，$f(x)=e^{x-1}+\ln x$，则 $f'(x)=e^{x-1}+\dfrac{1}{x}$，

$\therefore f'(1)=e^0+1=2$，又 $f(1)=e^0+\ln 1=1$，

$\therefore y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为：$y-1=2(x-1)$，即 $2x-y-1=0$.

【小问 2 详解】

方法一：令 $g(x)=f(x)-a-a\ln a=e^{x-1}-a\ln x-a-a\ln a$，则 $g(x)\geq 0$ 恒成立，

$g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$g'(x)=e^{x-1}-\dfrac{a}{x}$ 且 $a>0$；

令 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=e^{x-1}+\dfrac{a}{x^2}>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，即 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $g'(a+1)=e^a-\dfrac{a}{a+1}=e^a-1+\dfrac{1}{a+1}>0$，$g'\left(\dfrac{a}{a+1}\right)=e^{-\frac{1}{a+1}}-1-a<0$，

$\therefore \exists x_0 \in \left(\dfrac{a}{a+1}, a+1\right)$，使得$g'(x_0)=0$，且当$x \in (0, x_0)$时，$g'(x)<0$；当$x \in (x_0, +\infty)$时，$g'(x)>0$；

$\therefore g(x)$在$(0, x_0)$上单调递减，在$(x_0, +\infty)$上单调递增，

$\therefore g(x)_{\min} = g(x_0) = e^{x_0-1} - a\ln x_0 - a - a\ln a$，

由$g'(x_0)=0$得：$e^{x_0-1} = \dfrac{a}{x_0}$，$\therefore \ln x_0 + x_0 - 1 = \ln a$，$a = x_0 e^{x_0-1}$，

$\therefore g(x_0) = e^{x_0-1} - x_0 e^{x_0-1}\ln x_0 - x_0 e^{x_0-1} - x_0 e^{x_0-1}(\ln x_0 + x_0 - 1) = e^{x_0-1}(1 - 2x_0\ln x_0 - x_0^2)$，

$\therefore e^{x_0-1}(1 - 2x_0\ln x_0 - x_0^2) \ge 0$，即$\dfrac{1}{x_0} - 2\ln x_0 - x_0 \ge 0$，

令$u(x) = \dfrac{1}{x} - 2\ln x - x$，则$u(x)$在$(0, +\infty)$上单调递减，

又$u(x_0) = \dfrac{1}{x_0} - 2\ln x_0 - x_0 \ge 0$，$u(1)=0$，$\therefore 0 < x_0 \le 1$，

设$t(x) = xe^{x-1}\ (0 < x \le 1)$，则$t'(x) = (x+1)e^{x-1} > 0$，

$\therefore t(x)$在$(0,1]$上单调递增，$\therefore 0 < t(x) \le 1$，$\therefore 0 < x_0 e^{x_0-1} \le 1$，

又$a = x_0 e^{x_0-1}$，$\therefore a$的取值范围为$(0,1]$.

方法二：由$f(x) \ge a\ln a + a$得：$e^{x-1} \ge a + a\ln a + a\ln x$，

$\therefore xe^{x-1} \ge ax(1 + \ln a + \ln x) = ax[\ln(ax)+1] = [\ln(ax)+1]e^{[\ln(ax)+1]-1}$，

当$\ln(ax)+1 \le 0$时，$xe^{x-1} > 0 \ge \ln(ax)+1$在$a>0$，$x>0$时恒成立，$\therefore a>0$；

当$\ln(ax)+1>0$时，设$h(x) = xe^{x-1}\ (x>0)$，则$h(x) \ge h(\ln(ax)+1)$，

$\because h'(x) = (x+1)e^{x-1} > 0$，$\therefore h(x)$在$(0, +\infty)$上单调递增，

$\therefore x \ge \ln(ax)+1$，即$ax \le e^{x-1}\ (x>0)$，$\therefore a \le \dfrac{e^{x-1}}{x}\ (x>0)$，

令$u(x) = \dfrac{e^{x-1}}{x}\ (x>0)$，则$u'(x) = \dfrac{(x-1)e^{x-1}}{x^2}$，

$\therefore$当$x \in (0,1)$时，$u'(x)<0$；当$x \in (1, +\infty)$时，$u'(x)>0$；

$\therefore u(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1, +\infty)$上单调递增，$\therefore u(x)_{\min} = u(1) = 1$，

$\therefore a \le 1$，又 $a > 0$，$\therefore 0 < a \le 1$；

综上所述：实数 a 的取值范围为 $(0,1]$.

方法三：$\because f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，$f(x) \ge a + a\ln a$ 恒成立，$\therefore f(1) = 1 \ge a + a\ln a$ 必然成立；

令 $S(a) = a + a\ln a$，则 $S'(a) = 2 + \ln a$，

$\therefore$ 当 $a \in (0, \mathrm{e}^{-2})$ 时，$S'(a) < 0$；当 $a \in (\mathrm{e}^{-2}, +\infty)$ 时，$S'(a) > 0$；

$\therefore S(a)$ 在 $(0, \mathrm{e}^{-2})$ 上单调递减，在 $(\mathrm{e}^{-2}, +\infty)$ 上单调递增，

又 $S(1) = 1$，当 $0 < a < \mathrm{e}^{-1}$ 时，$S(a) = a(1 + \ln a) < 0$，

$\therefore$ 当 $0 < a \le 1$ 时，$a + a\ln a \le 1$；

下面证明：当 $0 < a \le 1$ 时，$f(x) \ge a\ln a + a$ 恒成立.

$\because a\ln a \le 0$，$\therefore a\ln x + a + a\ln a \le a\ln x + a = a(\ln x + 1)$，

$\therefore \mathrm{e}^{x-1} - a\ln x - a\ln a - a \ge \mathrm{e}^{x-1} - a(\ln x + 1)$，

令 $F(x) = \mathrm{e}^{x-1} - a(\ln x + 1)$，则 $F'(x) = \mathrm{e}^{x-1} - \dfrac{a}{x}$，

令 $G(x) = F'(x)$，则 $G'(x) = \mathrm{e}^{x-1} + \dfrac{a}{x^2} > 0$，$\therefore F'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

当 $a = 1$ 时，$F'(x) = \mathrm{e}^{x-1} - \dfrac{1}{x}$，$F'(1) = 0$，

$\therefore$ 当 $x \in (0,1)$ 时，$F'(x) < 0$；当 $x \in (1,+\infty)$ 时，$F'(x) > 0$；

$\therefore F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore F(x) \ge F(1) = 0$，

$\therefore \mathrm{e}^{x-1} - a\ln x - a\ln a - a \ge 0$ 恒成立，即 $f(x) \ge a\ln a + a$ 恒成立；

当 $0 < a < 1$ 时，$F'(1) = 1 - a > 0$，$F'(a) = \mathrm{e}^{a-1} - 1 < 0$，

$\therefore \exists x_0 \in (a,1)$，使得 $F'(x_0) = 0$，且当 $x \in (0, x_0)$ 时，$F'(x) < 0$；当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时，$F'(x) > 0$；

$\therefore F(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增，$\therefore F(x) \ge F(x_0) = \mathrm{e}^{x_0 - 1} - a(\ln x_0 + 1)$，

由 $F'(x_0) = 0$ 得：$\mathrm{e}^{x_0 - 1} = \dfrac{a}{x_0}$，$\ln x_0 = \ln a + 1 - x_0$，

$\therefore F(x_0) = \dfrac{a}{x_0} - a(\ln a + 1 - x_0) = a\left(\dfrac{1}{x_0} + x_0\right) - a - a\ln a$，

$\because x_0\in(a,1)$，$\therefore \dfrac{1}{x_0}+x_0>2$，$\therefore F(x_0)=a\left(\dfrac{1}{x_0}+x_0\right)-a-a\ln a>a-a\ln a=a(1-\ln a)>0$，

$\therefore F(x)\geq F(x_0)>0$，

$\therefore e^{x-1}-a\ln x-a\ln a-a\geq 0$ 恒成立，即 $f(x)\geq a\ln a+a$ 恒成立；

当 $a>1$ 时，$f(1)=1<a(1+\ln a)=a+a\ln a$，显然不满足 $f(x)\geq a+a\ln a$ 恒成立；

综上所述：实数 a 的取值范围为 $(0,1]$.