长郡中学 2023 届高三月考试卷 (七)

数学

时量:120 分钟　　满分:150 分

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x\mid \log_{1.5}(x-1)>0\}$, $B=\{x\mid 2^x<4\}$, 则 (　　)

A. $A=B$　　B. $A\supseteq B$　　C. $A\cup B=B$　　D. $A\cap B=B$

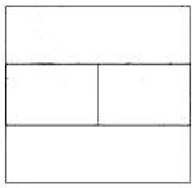
2. 设 $b,c\in R$, 若 $2-\mathrm{i}$ (i 为虚数单位) 是一元二次方程 $x^2+bx+c=0$ 的一个虚根, 则 (　　)

A. $b=4,c=3$　　B. $b=4,c=5$　　C. $b=-4,c=3$　　D. $b=-4,c=5$

3. 圆台上、下底面的圆周都在一个直径为 10 的球面上. 其上、下底面的半径分别为 4 和 5, 则该圆台的体积为 (　　)

A. 61π　　B. 62π　　C. 63π　　D. 64π

4. 如图, 用 4 种不同的颜色, 对四边形中的四个区域进行着色, 要求有公共边的两个区域不能用同一种颜色, 则不同的着色方法有 (　　)



A. 72　　B. 56　　C. 48　　D. 36

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+1}+(-1)^n a_n=3n-1(n\subset N^*)$. 则 $\{a_n\}$ 的前 60 项的和为 (　　)

A. 1240　　B. 1830　　C. 2520　　D. 2760

6. 已知 $\omega\in R$, 函数 $f(x)=(x-6)^2\cdot\sin(\omega x)$, 存在常数 $a\in R$, 使得 $f(x+a)$ 为偶函数, 则 ω 的值可能为 (　　)

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{5}$

7. . 已知 F_1,F_2 是双曲线 C 的两个焦点, P 为 C 上一点, 且 $\angle F_1PF_2=60^\circ$, $|PF_1|=\lambda|PF_2|(\lambda>1)$, 若 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{7}}{2}$, 则 λ 的值为 (　　)

A. 3　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

8. 若 $a=\log_{2021}2022, b=\log_{2022}2023, c=\frac{2022}{2021}, d=\frac{2023}{2022}$，则 a,b,c,d 中最大的是（　　）

A. a　　B. b　　C. C　　D. d

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9. 下列命题中，真命题有（　　）

A. 数据6,2,3,4,5,7,8,9,1,10的70%分位数是8.5

B. 若随机变量 $X\sim B\left(6,\frac{1}{3}\right)$．则 $D(X)=\frac{4}{9}$

C. 若事件 A,B 满足 $0<P(A),P(B)<1$ 且 $P(A\overline{B})=P(A)\cdot[1-P(B)]$，则 A 与 B 独立

D. 若随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$，$P(X>1)=0.68$．则 $P(2\leqslant x<3)=0.18$

10. 已知 $\frac{2\pi}{3}$ 是函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)\ (0<\varphi<\pi)$ 的一个零点，则（　　）

A. $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{5\pi}{12}\right)$ 单调递减

B. $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$ 只有一个极值点

C. 直线 $x=\frac{7\pi}{6}$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称轴

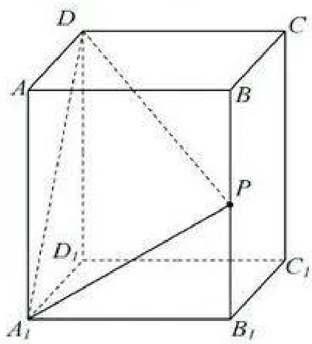
D. 直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}-x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线

11. 已知 O 为坐标原点，过抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 焦点 F 的直线与 C 交于 A,B 两点，其中 A 在第一象限，点 $M(p,0)$，若 $|AF|=|AM|$，则（　　）

A. 直线 AB 的斜率为 $2\sqrt{6}$　　B. $|OB|=|OF|$

C. $|AB|>4|OF|$　　D. $\angle OAM+\angle OBM<180°$

12. 如图，在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为棱 BB_1 的中点，Q 为正方形 BB_1C_1C 内一动点（含边界），则下列说法中正确的是（　　）



A. 若 $D_1Q\ /\!/$ 平面 A_1PD，则动点 Q 的轨迹是一条线段

B. 存在 Q 点，使得 $D_1Q\perp$ 平面 A_1PD

C. 当且仅当 Q 点落在棱 CC_1 上某点处时，三棱锥 $Q-A_1PD$ 的体积最大

D. 若 $D_1Q=\frac{\sqrt{6}}{2}$，那么 Q 点的轨迹长度为 $\frac{2}{4}\pi$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13. 已知在 $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\cdot\sqrt[4]{x}}\right)^n$ 的展开式中，前3项的系数成等差数列，则展开式中当 x 的一次项的

系数为 ________.

14. 若 $3\sin\alpha-\sin\beta=\sqrt{10},\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, 则 $\sin\alpha=$ ________, $\cos2\beta=$ ________.

15. 已知 F_1,F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点, 点 P 是椭圆上任意一点, 以 PF_1 为直径作圆 N, 直线 ON 与圆 N 交于点 Q(点 Q 不在椭圆内部), 则 $\overrightarrow{QF_1}\cdot\overrightarrow{QF_2}=$ ________.

16. 在数列 $\{a_n\}$ 中给定 a_1, 且函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a_{n+1}\sin x+(a_n+2)x+1$ 的导函数有唯一的零点, 函数 $g(x)=8x+\sin(\pi x)-\cos(\pi x)$ 且 $g(a_1)+g(a_2)+\cdots+g(a_9)=18$. 则 $a_5=$ ________.

四、解答题: 本题共6小题, 共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分10分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 已知 $\sin C\sin(A-B)=\sin B\sin(C-A)$.

(1) 证明: $2a^2=b^2+c^2$;

(2) 若 $a=5$, $\cos A=\frac{25}{31}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (本小题满分12分)

设 $\{a_n\}$ 是公比不为1的等比数列, a_1 为 a_2,a_3 的等差中项.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的公比;

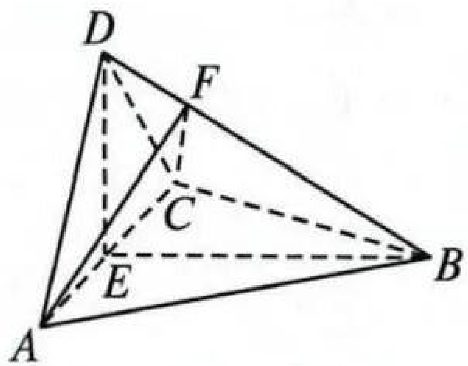
(2) 若 $a_1=1$, 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和.

19. (本小题满分12分)

如图, 四面体 $ABCD$ 中, $AD\perp CD$, $AD=CD$, $\angle ADB=\angle BDC$, E 为 AC 的中点

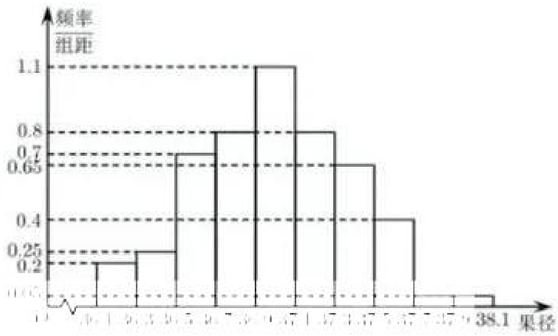
(1) 证明: 平面 $BED\perp$ 平面 ACD;

(2) 设 $AB=BD=2$, $\angle ACB=60°$, 点 F 在 BD 上, 当 $\triangle AFC$ 的面积最小时, 求 CF 与平面 ABD 所成角的正弦值.



20. (本小题满分 12 分)

浙江省东魁杨梅是现在世世界主最大果形的杨梅，有“乒乓杨梅”、“杨梅之皇”的美誉，东魁杨梅始于浙江黄岩区江口街道东岙村一棵树龄约 120 多年的野杨梅树，经过东岙村和白龙岙村村民不断改良，形成了今天东魁杨梅的品种，栽培东魁杨梅一举多得，对开发山区资源，绿化荒山，保持水土，增加山区经济收入具有积极意义. 根据多年的经验，可以认为东魁杨梅果实的果径 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$（单位：mm），但因气候、施肥和技术的不同，每年的 μ 和 σ 都有些变化. 现某农场为了了解今年的果实情况，从摘下的杨梅果实中随机取出 1000 颗，并测量这 1000 颗果实的果径，得到如下频率分布直方图.



(1) 用频率分布直方图估计样本的平均数 $\bar{x}$ 近似代替 μ，标准差 s 近似代替 σ，已知 $s=0.3$. 根据以往经验，把果径与 μ 的差的绝对值在 2σ 内的果实称为“标准果”．现从农场中摘取 20 颗果，请问这 20 颗果恰好有一颗不是“标准果”的概率.（结果精确到 0.01）

(2) 随着直播带货的发展，该农场也及时跟进. 网络销售在大大提升销量的同时，也增加了坏果赔付的成本. 现该农场有一款“9A20”的主打产品，该产品按盒销售，每盒 20 颗，售价 80 元，客户在收到货时如果有坏果，每一个坏果该农场要赔付 1 元. 根据收集到的数据：

若采用 A 款包装盒，成本 a（$1\leqslant a\leqslant 5$）元，且每盒出现坏果个数 X_1 满足：

$$P(X_1=i)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^i, i=1,2,3,4,\\ \dfrac{1}{16}, i=0,\\ 0, i=5,6,\cdots,20.\end{cases}$$

若采用 B 款包装盒，成本 $\dfrac{8a}{7}$ 元，且每盒出现坏果个数 X_2 满足

$$P(X_2=i)=\begin{cases}m\left(\dfrac{1}{2}\right)^i, i=1,2,3,\\ 0, i=0,4,5,6,\cdots,20,\end{cases}\quad(m\text{ 为常数}).$$

请运用概率统计的相关知识分析，选择哪款包装盒可以获得更大利润?

参考数据：$36.2\times0.2+36.4\times0.25+36.6\times0.7+36.8\times0.8+37\times1.1+37.2\times0.8+37.4\times0.65+37.6\times0.4+37.8\times0.05+38\times0.05=185$；

$P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)=0.6827$；$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)=0.9545$；

$P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)=0.9973$；$0.9545^{19}\approx0.412$；$0.9545^{20}\approx0.393$.

21. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，且 F 与圆 $M:x^2+(y+4)^2=1$ 上点的距离的最小值为 4.

(1) 求 p;

(2) 若点 P 在圆 M 上,PA,PB 是 C 的两条切线,A,B 是切点，求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

22. (本小题满分 12 分)

已知 $a>0$，函数 $f(x)=e^{ax}\sin x(x\in[0,+\infty))$，记 x_n 为 $f(x)$ 的从小到大的第 $n(n\in N^*)$ 个极值点.

证明:(1) 数列 $\{f(x_n)\}$ 是等比数列;

(2) 若 $a\geqslant\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}$，则对一切 $n\in N^*$,$x_n<|f(x_n)|$ 恒成立.