

郑州外国语学校 2022-2023 学年上期高三第四次调研考试数学（文科）答案

一. 选择题 BADAB AADCB CD

二. 填空题 13. $\frac{5}{3}$ 14. $\frac{\pi}{3}$ 15. $\frac{3}{8}$ 16. $[2, +\infty)$

三. 解答题（共 6 小题）

17. 解：（1）在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $c \sin B \cos B + b \sin B \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ ，

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 得 $\sin C \sin B \cos B + \sin B \sin B \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin B$ ，.....2 分

因为 $\sin B \neq 0$ ，所以 $\sin C \cos B + \sin B \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，所以 $\sin(B+C) = \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，.....4 分

因为 $0 < A < \pi$ ，所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 或 $A = \frac{2\pi}{3}$ ；.....6 分

（2）由 A 为钝角及（1）结论，则 $A = \frac{2\pi}{3}$ ，.....7 分

由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ ，来源：高三答案公众号.....8 分

又 $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}bc$ ，.....9 分

所以 $\frac{S}{a^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{bc}{b^2 + c^2 - bc} \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{bc}{2bc - bc} = \frac{\sqrt{3}}{12}$ ，当且仅当 $b=c$ 时取等号，

故 $\frac{S}{a^2}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{12}$ ，.....12 分（不可取“=”条件扣 1 分）

18. 解：（1）因为 $a_{n-1} = -\frac{2}{3}S_n + 1$ ，

由 $a_1 = 1$ ，所以 $a_2 = -\frac{2}{3}a_1 - 1 = \frac{1}{3}$ ，.....1 分

当 $n \geq 2$ 时， $a_n = -\frac{2}{3}S_{n-1} - 1$ ，两式相减得， $a_{n-1} - a_n = -\frac{2}{3}a_n$ ，即 $a_{n-1} = \frac{1}{3}a_n$ ($n \geq 2$).....2 分

易知， $a_2 = \frac{1}{3}a_1$ ，符合上式，.....3 分

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项， $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列，.....4 分

所以 $a_n = (\frac{1}{3})^{n-1}$ ；.....5 分

$b_n = 2 \log_{\frac{1}{3}} a_n + 3 = 2 \log_{\frac{1}{3}} (\frac{1}{3})^{n-1} + 3 = 2n + 1$ ；.....6 分

（2）证明：由（1） $b_n = 2n + 1$ ，所以 $T_n = \frac{n(3+2n+1)}{2} = n(n+2)$ ，.....7 分

若 $c_n = \frac{1}{T_n} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})$ ，.....9 分

所以 $R_n = \frac{1}{2} [(1 - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) + \dots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})]$

$= \frac{1}{2} (\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)} < \frac{3}{4}$ 得证.12 分



19. 证明:(1)取 PB 的中点 O , 连接 OA, OC , $\because \triangle PBC$ 是正三角形, $\therefore CO \perp PB$,

同理 $OA \perp PB$, 又 $CO \cap OA = O$, $CO, OA \subset$ 平面 AOC ,

$\therefore PB \perp$ 平面 AOC ,2 分

又 $AC \subset$ 平面 AOC , $\therefore AC \perp PB$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是边长 2 的菱形, $\therefore AC \perp BD$,

又 $PB \cap BD = B$, $PB, BD \subset$ 平面 PBD , $\therefore AC \perp$ 平面 PBD ,4 分

$\because PD \subset$ 平面 PBD , $\therefore AC \perp PD$;6 分

(2) $\because$ 面 $PBC \perp$ 面 PAB 面 $PBC \cap$ 面 $PAB = PB$, $CO \subset$ 面 PBC , $CO \perp PB$

$\therefore CO \perp$ 面 PAB 8 分

$\because CD \parallel AB$, $AB \subset$ 平面 PAB , $CD \not\subset$ 平面 PAB , $\therefore CD \parallel$ 平面 PAB ,9 分

$\therefore D$ 到平面 PAB 的距离就是 C 到平面 PAB 的距离, 即 $CO = \sqrt{3}$10 分

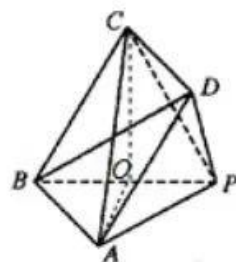
$\therefore$ 三棱锥 $P-ABD$ 的体积 $V_{P-ABD} = V_{D-PAB} = \frac{1}{3} S_{\triangle PAB} \times CO = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \times \sqrt{3} = 1$12 分

法 2: $\because$ 面 $PBC \perp$ 面 PAB 面 $PBC \cap$ 面 $PAB = PB$, $OC \subset$ 面 PBC , $OC \perp PB$

$\therefore CO \perp$ 面 PAB 8 分

$\because CO = \sqrt{3}$ 且 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore V_{P-ABD} = V_{P-ABC} = V_{C-PAB} = \frac{1}{3} S_{\triangle PAB} \times CO = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \times \sqrt{3} = 1$ 12 分



20. 命题意图 本题考查椭圆的性质, 椭圆与直线的位置关系.

解析 (I) 设椭圆的半焦距为 $c(c > 0)$. 根据题意, $2a = 4$, 所以 $a = 2$ (1 分)

因为以线段 F_1F_2 为直径的圆与椭圆 C 仅有 2 个不同的公共点, 所以此圆与椭圆相切, 切点为椭圆的短轴端点, 所以 $b = c$ (2 分)

因为 $a^2 = b^2 + c^2$, 所以 $b^2 = 2$ (3 分)

故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ (4 分)

(II) 当 l 与 x 轴重合时, 总有 $\angle EGM = \angle FGM$.

当 l 与 x 轴不重合时, 设 $l: x = my + t, E(x_1, y_1), F(x_2, y_2)$,

联立方程得 $\begin{cases} x = my + t, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, \end{cases}$ 消去 x 得 $(m^2 + 2)y^2 + 2mty + t^2 - 4 = 0$, (5 分)

由 $\Delta = 4m^2t^2 - 4(m^2 + 2)(t^2 - 4) > 0$ 得 $2m^2 - t^2 + 4 > 0$,

$y_1 + y_2 = -\frac{2mt}{m^2 + 2}, y_1y_2 = \frac{t^2 - 4}{m^2 + 2}$. ① (6 分)

因为 $\angle EGM = \angle FGM$, 所以 $k_{EG} + k_{FG} = 0$, 即 $\frac{y_1}{x_1 - 4} + \frac{y_2}{x_2 - 4} = 0$,



所以 $y_1(x_2 - 4) + y_2(x_1 - 4) = 0$, 所以 $y_1(my_2 + t - 4) + y_2(my_1 + t - 4) = 0$,
即 $2my_1y_2 + (t - 4)(y_2 + y_1) = 0$, (8 分)
将①代入得 $m(t - 1) = 0$, 该式对任意 m 恒成立, 故 $t = 1$.
经检验 $t = 1$ 符合题意, 故直线 l 过定点 $M(1, 0)$, (10 分)
设 $P(x, y) (-2 \leq x \leq 2)$, 且点 P 到点 M 的距离为 d ,
则 $d = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + 2\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 1} \geq 1$,
当 $x = 2$ 时等号成立, 故点 P 到点 M 的最小距离为 1. (12 分)

22. 解: (1) 由 $f(x) = ax^2 - bx + \ln x$, 得 $f'(x) = 2ax - b + \frac{1}{x}$,1 分

因为 $(1, f(1))$ 在切线方程 $2x - 2y - 3 = 0$ 上,

所以 $2 - 2y - 3 = 0$, 解得 $y = -\frac{1}{2}$, 即 $f(1) = -\frac{1}{2}$, $\therefore f'(1) = 1$

所以 $\begin{cases} a - b + \ln 1 = -\frac{1}{2}, \\ 2a - b + 1 = 1 \end{cases}$,3 分

解得 $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$4 分

(2) 由 (1) 知, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln x$,

则 $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln x - mx (m \geq \frac{3}{2})$

则 $g'(x) = \frac{1}{x} + x - (m + 1) = \frac{x^2 - (m + 1)x + 1}{x} (x > 0)$,5 分

由 $g'(x) = 0$, 得 $x^2 - (m + 1)x + 1 = 0$,

因为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 是函数 $g(x)$ 的两个极值点,

所以方程 $x^2 - (m + 1)x + 1 = 0$ 有两个不相等的正实根 x_1, x_2 ,

所以 $x_1 - x_2 = m + 1$, $x_1x_2 = 1$, 所以 $x_2 = \frac{1}{x_1}$,6 分

因为 $m \geq \frac{3}{2}$, 所以 $x_1 + \frac{1}{x_1} = m + 1 \geq \frac{5}{2}$, 解得 $0 < x_1 \leq \frac{1}{2}$ 或 $x_1 \geq 2$,

因为 $0 < x_1 < x_2 = \frac{1}{x_1}$, 所以 $0 < x_1 \leq \frac{1}{2}$,7 分

所以 $g(x_1) - g(x_2) = \ln x_1 + \frac{1}{2}x_1^2 - (m + 1)x_1 - \ln x_2 - \frac{1}{2}x_2^2 + (m + 1)x_2$

$= \ln \frac{x_1}{x_2} + \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) - (m + 1)(x_1 - x_2) = 2\ln x_1 - \frac{1}{2}(x_1^2 - \frac{1}{x_1^2})$,8 分

令 $F(x) = 2\ln x - \frac{1}{2}(x^2 - \frac{1}{x^2}) (0 < x \leq \frac{1}{2})$,

则 $F'(x) = \frac{2}{x} - x - \frac{1}{x^3} = \frac{-(x^2 - 1)^2}{x^3} < 0$, 所以 $F(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2}]$ 上单调递减,9 分

所以当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $F(x)$ 取得最小值,

即 $F(x)_{\min} = 2\ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\frac{1}{4} - 4) = \frac{15}{8} - 2\ln 2$,10 分

所以 $\lambda \leq \frac{15}{8} - 2\ln 2$,11 分

即实数 λ 的最大值为 $\frac{15}{8} - 2\ln 2$12 分



22. 解: (1) 消去 θ , 得曲线 C 的标准方程: $(x-1)^2 + y^2 = 1$2分

由 $\rho \cos(\theta + \frac{\pi}{4}) = 0$, 得 $\rho \cos\theta - \rho \sin\theta = 0$,

$\therefore$ 直线 l 的直角坐标方程为 $x - y = 0$ 5分

(2) 圆心 $(1,0)$ 到直线 l 的距离为 $d = \frac{|1-0|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore |AB| = 2\sqrt{1^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{2}$,7分

则圆上的点 M 到直线 l 的最大距离为 $d + r = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$,9分

$\therefore \triangle ABM$ 面积的最大值为: $(S_{\triangle ABM})_{\max} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times (\frac{\sqrt{2}}{2} + 1) = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$ 10分

23. 命题意图 本题考查含绝对值函数的性质, 基本不等式的应用.

$$\text{解析 (I) 因为 } m > 0, \text{ 所以 } f(x) = 2|x| + 12x - m = \begin{cases} m - 4x, & x \leq 0, \\ m, & 0 < x < \frac{m}{2}, \\ 4x - m, & x \geq \frac{m}{2}, \end{cases} \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

要使 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 则 $\frac{m}{2}$ 与 0 关于 1 对称, 所以 $m=4$ (4分)

所以当 $0 < x < 2$ 时, $f(x)$ 取得最小值 4 (5分)

(II) 因为 a, b 都是正数, 且 $a+b=4$, (6分)

所以 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = \frac{1}{4}(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \right) = \frac{1}{4} \left(5 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} \right) \geq \frac{1}{4} \left(5 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{4a}{b}} \right) = \frac{9}{4}$, (9分)

当且仅当 $a = \frac{4}{3}, b = \frac{8}{3}$ 时等号成立.

所以 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为 $\frac{9}{4}$ (10分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线