

绝密★考试结束前

2023-2024 学年第一学期天域全国名校协作体联考

高三年级数学学科 试题

考生须知:

1. 本卷共 5 页满分 150 分, 考试时间 120 分钟.
2. 答题前, 在答题卷指定区域填写班级、姓名、考场号、座位号及准考证号并填涂相应数字.
3. 所有答案必须写在答题纸上, 写在试卷上无效.
4. 考试结束后, 只需上交答题纸.

选择题部分

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $A = \{x | x^2 - 5x \leq 0\}$, $B = \{x | y = \ln(x-7)\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = (\quad)$
A. $(0, 7]$ B. $(0, 5)$ C. $(7, +\infty)$ D. $(5, +\infty)$
2. 设复数 $z = \frac{2-i}{1+i}$, 则 $z \cdot \bar{z} = (\quad)$
A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ C. 2 D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$
3. 已知圆锥的底面半径为 2, 高为 $4\sqrt{2}$, 则该圆锥的侧面积为 (\quad)
A. 4π B. 12π C. 16π D. $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$
4. 已知 \vec{a}, \vec{b} 是单位向量, 若 $\vec{a} \perp (\vec{a} + 3\vec{b})$, 则 \vec{a} 在 \vec{b} 上的投影向量为 (\quad)
A. $\frac{1}{3}\vec{a}$ B. $-\frac{1}{3}\vec{a}$ C. $\frac{1}{3}\vec{b}$ D. $-\frac{1}{3}\vec{b}$
5. 定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = f(x) + 2$, 则下列是周期函数的是 (\quad)
A. $y = f(x) - x$ B. $y = f(x) + x$ C. $y = f(x) - 2x$ D. $y = f(x) + 2x$
6. 已知圆 $C: x^2 - 6x + y^2 + 5 = 0$, P, Q 是圆上的两点, O 为坐标原点, 且 $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{PQ}$, 则 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 的值为 (\quad)
A. $\sqrt{10}$ B. $\sqrt{5}$ C. 10 D. 5
7. 小明先后投掷两枚骰子, 已知有一次投掷时朝上的点数为偶数, 则两次投掷时至少有一次朝

上的点数为4的概率为()

- A. $\frac{11}{36}$ B. $\frac{11}{27}$ C. $\frac{10}{27}$ D. $\frac{17}{36}$

8. 人教A版必修第一册第92页上“探究与发现”的学习内容是“探究函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的图象与性质”，经探究它的图象实际上是双曲线.现将函数 $y = 3x + \frac{1}{x}$ 的图象绕原点顺时针旋转得到焦点位于 x 轴上的双曲线 C ，则该双曲线 C 的离心率是()

- A. $3 + \sqrt{10}$ B. $20 - 6\sqrt{10}$ C. $\sqrt{3 + \sqrt{10}}$ D. $\sqrt{20 - 6\sqrt{10}}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 下列结论中正确的是()

- A. “ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, 2^{x_0} > x_0^2$ ”的否定为“ $\forall x \in \mathbf{R}, 2^x \leq x^2$ ”
- B. 设 α, β 是两个不同的平面， m 是直线且 $m \subset \alpha$ ，则“ $m \perp \beta$ ”是“ $\alpha \perp \beta$ ”的充要条件
- C. 若随机变量 X 服从正态分布 $N(10, \sigma^2)$ ，则 $P(x \leq 7) < P(x \geq 13)$
- D. 对具有线性相关关系的变量 x, y ，其线性回归方程为 $\hat{y} = 2x - m$ ，若样本的中心为 $(m, 2)$ ，则实数 m 的值是2

10. 将函数 $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x (\omega > 0)$ 图象上点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ ，然后将所得图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，得到函数 $g(x) = 2 \sin(2x + \varphi) \left(\left| \varphi \right| < \frac{\pi}{2} \right)$ 的图象.则下列结论中正确的是()

- A. $f(x) = 2 \sin(x + \frac{\pi}{3})$
- B. $\varphi = -\frac{\pi}{3}$
- C. $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{7\pi}{6} \right] (k \in \mathbf{Z})$
- D. $x = -\frac{\pi}{12}$ 为 $g(x)$ 图象的一条对称轴

11. 已知函数 $f(x) = e^x - e^{-x} + x^3 - ax$ ，则下列结论中正确的是()

- A. 当 $a = 0$ 时，曲线 $y = f(x)$ 在 $(0, 0)$ 处的切线方程为 $y = x$
- B. $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值与最小值之和为0
- C. 若 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上为增函数，则 a 的取值范围为 $(-\infty, 2]$

D. $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上至多有 3 个零点

12. 如图, 有一只青蛙在正方形池塘的顶点 $ABCD$ 之间跳跃, 假设青蛙它跳向相邻顶点的概率为 $\frac{1}{4}$, 跳向不相邻顶点的概率为 $\frac{1}{2}$, 若青蛙一开始位于顶点 A 处, 记青蛙跳

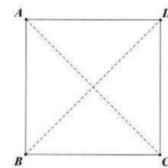
跃 n 次后仍位于顶点 A 上的概率为 P_n , 则下列结论中正确的是 ()

A. 青蛙跳跃 2 次后位于 B 点的概率为 $\frac{1}{4}$

B. 数列 $\left\{P_n - \frac{1}{4}\right\}$ 是等比数列

C. 青蛙跳动奇数次后只能位于点 A 的概率始终小于 $\frac{1}{4}$

D. 存在整数 $n \in \mathbf{N}^*$, 使得青蛙跳动 n 次后位于 C 点和 D 点的概率相等



非选择题部分

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知抛物线 $x^2 = 2py$ 上一点 $A(x_0, 2)$ 到焦点的距离是该点到 x 轴距离的 2 倍, 则 $p =$ _____

14. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 公差 $d > 0$, $S_5 = S_9$, 则当 S_n 取最小值时, $n =$ _____

15. 米斗是称量粮食的量器, 是古代官仓、粮栈、米行的必备的用具。为使坚固耐用, 米斗多用上好的木料制成。米斗有着吉祥的寓意, 是丰饶富足的象征, 带有浓郁的民间文化韵味, 如今也成为了一种颇具意趣的藏品。如图的米斗可以看作一个正四棱台, 已知该米斗的侧棱长为 10, 两个底边长分别为 8 和 6, 则该米斗的外接球的表面积是 _____



16. 若 $a > 0$, $b > 0$, 且 $3a + b = 1$, 不等式 $3a^2 + b - mab + 2 > 0$ 恒成立, 则 m 的取值范围为 _____

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 公差为 2，且 a_1, a_2, a_4 恰为等比数列 $\{b_n\}$ 的前三项.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = a_n + (-1)^n \cdot b_n$ ，求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (12 分)

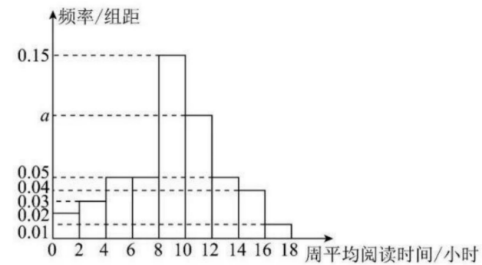
在 $\triangle ABC$ 中角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，满足 $2a \sin A \cos B + b \sin 2A = 2\sqrt{3}a \cos C$.

(1) 求角 C 的大小；

(2) 若 $c = 2\sqrt{3}$ ， $\angle ABC$ 的平分线与 $\angle BAC$ 的平分线交于点 I ，求 $\triangle ABI$ 周长的最大值.

19. (12 分)

为了解某市区高中学生的阅读时间，从该市区随机抽取了 800 名学生进行调查，得到了这 800 名学生一周的平均阅读时间（单位：小时），并将样本数据分成九组，绘制成如图所示的频率分布直方图.



(1) 求 a 的值；

(2) 为进一步了解这 800 名学生阅读时间的分配情况，从周平均阅读时间在 $(12, 14]$ ， $(14, 16]$ ，

$(16, 18]$ 三组内的学生中，采用分层抽样的方法抽取了 10 人，现从这 10 人中随机抽取 3 人，记周

平均阅读时间在 $(14, 16]$ 内的学生人数为 X ，求 X 的分布列和数学期望；

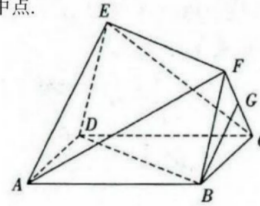
(3) 以样本的频率估计概率，从该市区学生周平均阅读时间在 $(8, 14]$ 内中随机抽取 20 名学生.这

20 名学生中，周平均阅读时间在 $(10, 12]$ 内的学生最可能有多少名？

20. (12分)

如图, 已知多面体 $ABCDEF$ 的底面 $ABCD$ 为矩形, 四边形 $BDEF$ 为平行四边形, 平面 $FBC \perp$ 平面 $ABCD$, $FB = FC = BC = 1$, $AB = 2$, G 是 CF 的中点.

- (1) 证明: $BG \parallel$ 平面 AEF ;
- (2) 求直线 AE 与平面 $BDEF$ 所成角的余弦值.



21. (12分)

已知在平面直角坐标系中, 点 $A(-2,0), B(2,0)$, $\triangle PAB$ 的周长为定值 $4\sqrt{2} + 4$.

- (1) 设动点 P 的轨迹为曲线 C , 求曲线 C 的方程;
- (2) 过点 A 作直线 l 交 C 于 M, N 两点, 连接 BM, BN 分别与 y 轴交于 D, E 两点, 若 $S_{\triangle BDE} = S_{\triangle BMN}$, 求直线 l 的方程.

22. (12分)

设函数 $f(x) = a \ln x - (x-1)e^x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 若 $a = e$, 求 $f(x)$ 的最大值;
- (2) 若 $f(x)$ 存在两个零点 x_1, x_2
 - (i) 求 a 的取值范围;
 - (ii) 设 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, 试探究是否存在实数 $a > e$, 使得 x_1, x_0, x_2 成等差数列, 若存在, 求出 a 的值, 若不存在, 请说明理由.