1号卷·A10联盟2
文科

巢湖一中 合肥八中 淮南二中 六安一中 南陵中学 舒城中学 太湖中学 天长

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

一、选择题(本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.)

1. 若集合 $A=\{x|-2<x<2\}$，$B=\{x\in \mathbf{N}|x^2+2x-8<0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{1\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{-2,-1,0,1\}$

2. $\dfrac{3i-5}{2+3i}$ 的虚部为（　　）

A. $\dfrac{1}{13}$　　B. $\dfrac{9}{13}$　　C. $-\dfrac{1}{13}$　　D. $\dfrac{21}{13}$

3. “共享单车，绿色出行”是近年来火爆的广告词，现对某市10名共享单车用户一个月内使用共享单车的次数进行统计，得到茎叶图如图所示，现有如下说法：①该组数据的极差为34；②该组数据的中位数为27；③该组数据的平均数为32，则上述说法正确的个数是(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

1	8			
2	3	5	6	7
3	2	3	5	
4	9			
5	2			

4. “$m<4$”是“函数 $f(x)=2x^2-mx+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases} x-2y\leqslant 0 \\ 2x-3\geqslant y \\ y\leqslant 4 \end{cases}$，则 $z=x-y$ 的最小值为（　　）

021届高三开年考

数学

中学 屯溪一中 宣城中学 滁州中学 池州一中 阜阳一中 灵璧中学 宿城一中

两部分。满分150分，考试时间120分钟。请在答题卷上作答。

A. -1　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 4

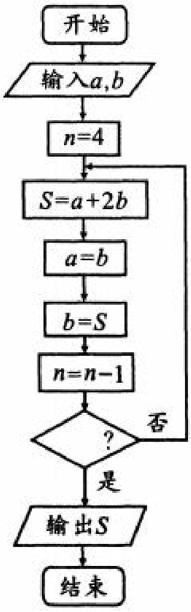
6. 已知 $x=3^{\frac{1}{2}}$，$y=0.5^{0.3}$，$z=\log_{0.2}0.5$，则（　　）

A. $y<z<x$　　B. $x<z<y$

C. $z<x<y$　　D. $z<y<x$

7. 运行如图所示的程序框图，若输入的 a,b 的值分别为 $2,3$，输出的 S 的值为 111，则判断框中可以填（　　）

A. $n\leqslant 2$　　B. $n<2$　　C. $n<1$　　D. $n<0$



8. 已知 α 是第三象限角，$3\cos 2\alpha+\sin\alpha=2$，则 $\tan\alpha=$（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{2}$

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x-\dfrac{1}{2}, x\geqslant 0 \\ \ln(-x), x<0 \end{cases}$，则函数 $y=f(f(x))$ 的零点个数为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

10. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 P 在棱 AD 上，过点 P 作该正方体的截面，当截面平行于平面 B_1D_1C 且面积为 $\sqrt{3}$ 时，线段 AP 的长为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

11. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 M 在 C 的左支上，过点 M 作 C 的一条渐近线的垂线，垂足为 N，则当 $|MF_2|+|MN|$ 取得最小值 10 时，ΔF_1NF_2 面积的最大值为（　　）

A. 25　　B. $\dfrac{25}{2}$　　C. $\dfrac{50}{9}$　　D. $\dfrac{100}{9}$

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=-2a_2=6$，a_n,a_{n+2},a_{n+1} 为等差数列，则 $S_{2020}=$（　　）

A. $4+\dfrac{1}{2^{2020}}$　　B. $4+\dfrac{1}{2^{2018}}$　　C. $4-\dfrac{1}{2^{2020}}$　　D. $4-\dfrac{1}{2^{2018}}$

第 II 卷（非选择题　共 90 分）

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13 题~第 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22 题~第 23 题为选考题，考生根据要求作答.

二、填空题（**本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**）

13. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(2,\lambda),\boldsymbol{b}=(-3,6),\boldsymbol{c}=(4,2)$，若 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=$ ________.

14. 曲线 $y=a-\ln x$ 在点 $(1,a)$ 处的切线与曲线 $y=-e^x$ 相切，则 $a=$ ________.

15. 已知抛物线 $x^2=8y$ 的焦点为 F，准线 l 交 y 轴于点 M，过抛物线上一点 P 作 $PQ\perp l$ 交 l 于点 Q，若 $|PF|=\dfrac{8}{3}$，则 $\angle QPF=$ ________.

16. 在正三棱锥 $S-ABC$ 中，$AB=BC=CA=6$，点 D 是 SA 的中点，若 $SB\perp CD$，则该三棱锥外接球的表面积为 ________.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 12 分）

随着冬季的到来，是否应该自觉佩戴口罩成为了人们热议的一个话题. 为了调查佩戴口罩的态度与性别是否具有相关性，研究人员作出相应调查，并统计数据如表所示：

	认为冬季佩戴口罩十分必要	认为冬季佩戴口罩没有必要
男性	300	200
女性	150	150

（Ⅰ）判断是否有 99.9% 的把握认为佩戴口罩的态度与性别有关?

（Ⅱ）若按照分层抽样的方法从男性中随机抽取 5 人，再从这 5 人中随机抽取 2 人，求恰有 1 人认为冬季佩戴口罩十分必要的概率.

参考公式：

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}，其中 n=a+b+c+d.$$

参考数据：

$P\left(K^2\geqslant k_0\right)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

18.（本小题满分 12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，

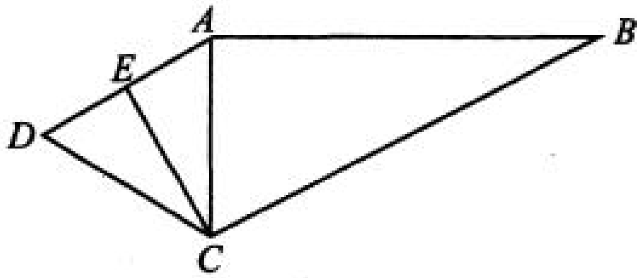
$c\sin A+\sqrt{3}a\sin\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=0$，$c=6$.

（Ⅰ）求 $\triangle ABC$ 外接圆的面积；

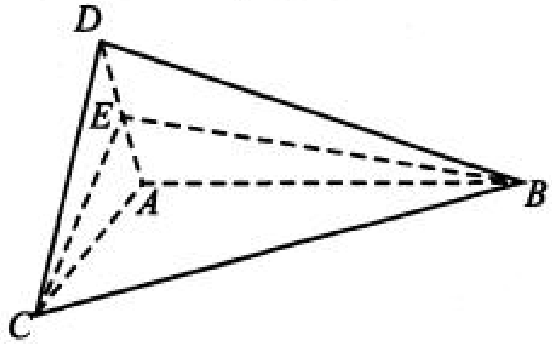
（Ⅱ）若 $c=\sqrt{3}b$，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，求 $\triangle ACM$ 的周长.

19.（本小题满分 12 分）

如图（1）所示，平面四边形 $ABCD$ 由等边 $\triangle ACD$ 与直角 $\triangle ABC$ 拼接而成，其中 $AB \perp AC$，$\tan\angle CBA=\frac{1}{2}$，$E$ 为线段 AD 的中点，$\triangle ACD$ 的面积为 $\sqrt{3}$. 现将 $\triangle ACD$ 沿 AC 进行翻折，使得平面 $DAB \perp$ 平面 DAC，得到的图形如图（2）所示.



图（1）



图（2）

（Ⅰ）求证：$AB \perp AD$；

（Ⅱ）求点 D 到平面 BCE 的距离.

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且过点 $P\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）若直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+m$（$m\neq 0$ 且 $m\neq -\sqrt{3}$）交椭圆 C 于 A,B 两点，记直线 PA,PB 的斜率分别为 k_1,k_2，探究：k_1k_2 是否为定值，若是，求出该值；若不是，请说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=1+(a+1)x+\ln x$.

（Ⅰ）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）对任意 $x>0$，求证：$\frac{2e^x}{xe^2}+1+(a+1)x>f(x)$.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答．注意：只能做选定的题目，如果多做，则按所做的第一题记分，解答时请写清题号．

22.（本小题满分 10 分）选修 4–4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+\cos\alpha \\ y=\sqrt{3}+\sin\alpha \end{cases}$（$\alpha$ 为参数），以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\theta_0$（$\rho\in\mathbf{R}$）．

（Ⅰ）求曲线 C 的极坐标方程；

（Ⅱ）当 $\theta_0\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，设直线 l 与曲线 C 相交于 M,N 两点，求 $|OM|+|ON|$ 的取值范围．

23.（本小题满分 10 分）选修 4–5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=\log_2\left(|2x-1|+|x-4|-m\right)(m\in\mathbf{R})$．

（Ⅰ）若函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，求 m 的取值集合 M；

（Ⅱ）在（Ⅰ）的条件下，正数 a,b 满足 $a,b\in M$，求证：

$$\frac{a+b}{4ab+49}<\frac{1}{14}.$$

1号卷·A10联盟2021届高三开年考
文科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

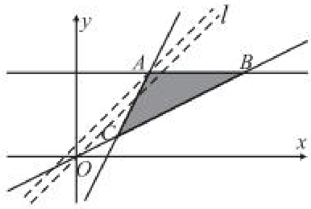
题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	C	A	B	D	C	A	C	A	B	D

1. B　由题意得，$B=\{x\in\mathbf{N}\mid (x-2)(x+4)<0\}=\{0,1\}$，$\therefore A\cap B=\{0,1\}$. 故选 B.

2. D　由题意得，$\dfrac{3i-5}{2+3i}=\dfrac{(3i-5)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{6i+9-10+15i}{13}=-\dfrac{1}{13}+\dfrac{21}{13}i$，故其虚部为 $\dfrac{21}{13}$，故选 D.

3. C　该组数据的极差为34，中位数为29.5，平均数为 $30+\dfrac{1}{10}\times(-12-7-5-4-3+2+3+5+19+22)=32$，观察可知，①③正确，故选 C.

4. A　若 $f(x)=2x^2-mx+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f'(x)=4x-m+\dfrac{1}{x}\geqslant 0$，即 $4x+\dfrac{1}{x}\geqslant m$，则 $m\leqslant 4$，故选 A.



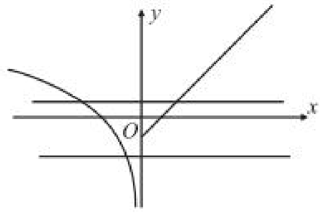
5. B　作出不等式组所表示的平面区域如图阴影部分所示，其中 $A\left(\dfrac{7}{2},4\right)$，$B(8,4)$，$C(2,1)$，作直线 $l:y=x$，平移直线 l，当其经过点 A 时，z 有最小值，即 $z_{\min}=\dfrac{7}{2}-4=-\dfrac{1}{2}$，故选 B.

6. D　$\because x=\sqrt{3}>1$，$0.5<y=0.5^{0.3}<0.5^0=1$，$z=\log_{0.2}0.5=\log_5 2<\log_5\sqrt{5}=0.5$，$\therefore z<y<x$，故选 D.

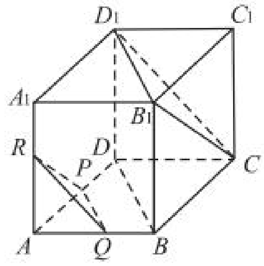
7. C　运行该程序，第一次，$S=8,a=3,b=8,n=3$；第二次，$S=19,a=8,b=19,n=2$；第三次，$S=46,a=19,b=46,n=1$；第四次，$S=111,a=46,b=111,n=0$，此时输出 S，故判断框中可以填 $n<1$，故选 C.

8. A　$\because \alpha$ 是第三象限角，$3\cos 2\alpha+\sin\alpha=2$，$\therefore 3(1-2\sin^2\alpha)+\sin\alpha=2$，
$\therefore 6\sin^2\alpha-\sin\alpha-1=0$，解得 $\sin\alpha=-\dfrac{1}{3}$ 或 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$（舍去），
$\therefore \cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\therefore \tan\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，故选 A.

9\. C　令 $f(x)=t$，当 $f(t)=0$ 时，解得 $t=\frac{1}{2}$ 或 $t=-1$. 在同一直角坐标系中分别作出 $y=f(x), y=-1, y=\frac{1}{2}$ 的图象如图所示，观察可知，$y=f(x)$ 与 $y=-1$ 有 1 个交点，$y=f(x)$ 与 $y=\frac{1}{2}$ 有 2 个交点，则 $y=f\left(f(x)\right)$ 的零点个数为 3，故选 C.



10\. A　如图，过点 P 作 D_1B_1, B_1C 的平行线，分别交棱 AB, AA_1 于点 Q, R，连接 QR, BD，易知 $\triangle PQR$ 是等边三角形，且为截面，则 $\frac{1}{2}PQ^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，解得 $PQ=2$，$\therefore AP=\frac{\sqrt{2}}{2}PQ=\sqrt{2}$. 故选 A.



11\. B　由题意得，$|MF_2|+|MN|=|MF_1|+2a+|MN|\geqslant|F_1N|+2a=b+2a$，当且仅当 M，F_1，N 三点共线时取等号，$\therefore |MF_2|+|MN|$ 的最小值为 $b+2a=10$，

$\therefore 10\geqslant 2\sqrt{2ab}$，即 $ab\leqslant\frac{25}{2}$，当且仅当 $b=2a=5$ 时，等号成立，

$\therefore S_{\triangle F_1NF_2}=2S_{\triangle F_1NO}=2\times\frac{1}{2}|NF_1|\cdot|NO|=ab\leqslant\frac{25}{2}$，故选 B.

12\. D　由题意得，$2a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$，故 $\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=\frac{\frac{a_{n+1}+a_n}{2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=-\frac{1}{2}$，且

$a_2-a_1=-9$，故 $a_{n+1}-a_n=-9\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，则

$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

$=-9\times\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{0}\right]+6=-9\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+6=6\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，

则 $\{a_n\}$ 是首项为 6，公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列，故

$S_n=6\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=4\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right]$，则 $S_{2020}=4\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{2020}\right]=4-\frac{1}{2^{2018}}$，

故选 D.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 将答案填写在题中的横线上.）

13. -30

由题意得，$12=-3\lambda$，解得 $\lambda=-4$，故 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=(6,-2)$. 故 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=-30$.

14. -2

对 $y=a-\ln x$ 求导得 $y'=-\dfrac{1}{x}$，$\therefore$ 曲线 $y=a-\ln x$ 在点 $(1,a)$ 处的切线方程为 $y-a=-(x-1)$，即 $y=-x+a+1$. 设 $y=-x+a+1$ 与 $y=-e^x$ 相切于点 $(x_0,-e^{x_0})$，对 $y=-e^x$ 求导得 $y'=-e^x$，$\therefore -e^{x_0}=-1$，$\therefore x_0=0$，即切点为 $(0,-1)$，它在切线 $y=-x+a+1$ 上，$\therefore a+1=-1$，$\therefore a=-2$.

15. $120°$（或 $\dfrac{2\pi}{3}$）

由题意得，$|MF|=4$，由抛物线的定义知 $|PQ|=|PF|=y_P+2=\dfrac{8}{3}$，$\therefore y_P=\dfrac{2}{3}$，$\therefore x_P=\pm\dfrac{4}{\sqrt{3}}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle FMQ$ 中，$|FQ|^2=|FM|^2+|MQ|^2=\dfrac{64}{3}$. $\because \triangle PFQ$ 为等腰三角形，$\therefore \cos\angle QPF=\dfrac{|PF|^2+|PQ|^2-|FQ|^2}{2|PF|\cdot|PQ|}=-\dfrac{1}{2}$，$\therefore \angle QPF=120°$.

16. 54π

设 $\triangle ABC$ 的中心为 G，连接 SG,BG，$\therefore SG\perp$ 平面 ABC，$\therefore SG\perp AC$，又 $AC\perp BG$，$\therefore AG\perp$ 平面 SBG，$\therefore AC\perp SB$，又 $SB\perp CD$，$\therefore SB\perp$ 平面 ACS. $\because S-ABC$ 为正三棱锥，$\therefore SA$，SB，SC 两两垂直，故外接球直径为 $3\sqrt{2}\times\sqrt{3}=3\sqrt{6}$，故三棱锥 $S-ABC$ 外接球的表面积为 $4\pi\times\left(\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2=54\pi$.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）$K^2=\dfrac{800\times(300\times150-150\times200)^2}{500\times300\times450\times350}\approx7.619<10.828$，…………………4 分

$\therefore$ 没有 99.9% 的把握认为佩戴口罩的态度与性别有关. …………………6 分

（Ⅱ）男性中认为冬季佩戴口罩十分必要抽取 3 人，记为 a,b,c，男性中认为冬季佩戴口罩没有必要抽取 2 人，记为 A,B，故随机抽取 2 人，所有基本事件为：

$(a,b),(a,c),(a,A),(a,B),(b,c),(b,A),(b,B),(c,A),(c,B),(A,B)$，……9 分

其中事件“恰有 1 人认为冬季佩戴口罩十分必要”包含的基本事件为：

$(a,A),(a,B),(b,A),(b,B),(c,A),(c,B)$，

故所求概率 $P=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$. …………………12 分

18.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）$\because c\sin A+\sqrt{3}a\sin\left(C+\frac{\pi}{2}\right)=0$，$\therefore c\sin A+\sqrt{3}a\cos C=0$，

$\therefore \sin C\sin A+\sqrt{3}\sin A\cos C=0$，……………………2 分

$\because \sin A\neq 0$，$\therefore \tan C=-\sqrt{3}$，$\because 0<C<\pi$，$\therefore C=\frac{2\pi}{3}$，……………………3分

$\therefore \triangle ABC$ 外接圆的半径 $R=\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{\sin C}=\frac{1}{2}\times\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$，……………………5分

$\therefore \triangle ABC$ 外接圆的面积为 12π．……………………6 分

（Ⅱ）由正弦定理得，$\sin B=\frac{b\sin C}{c}=\frac{b\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}b}=\frac{1}{2}$，……………………7 分

$\because 0<B<\frac{\pi}{3}$，$\therefore B=\frac{\pi}{6}$，$\therefore A=\pi-B-C=\frac{\pi}{6}$．……………………9 分

在$\triangle ACM$中，由余弦定理得，$CM^2=AM^2+AC^2-2AM\cdot AC\cdot\cos A$，

解得 $CM=2$，……………………11 分

则 $\triangle ACM$ 的周长为 $4+2\sqrt{3}$．……………………12 分

19.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）$\because \triangle DAC$ 为等边三角形，且 E 为 DA 的中点，$\therefore CE\perp DA$．……………………1 分

$\because$平面 $DAB\perp$平面 DAC，平面 $DAB\cap$平面 $DAC=DA$，$CE\subset$平面 DAC，

$\therefore CE\perp$平面 DAB，$\because AB\subset$平面 DAB，$\therefore AB\perp CE$．……………………4 分

又 $AB\perp AC$，$CE\cap AC=C$，$AC,CE\subset$平面 DAC，

$\therefore AB\perp$平面 DAC，……………………5 分

$\because AD\subset$平面 DAC，$\therefore AB\perp AD$．……………………6 分

（Ⅱ）$\because AB\perp AC$，$AB\perp AD$，$AC\cap AD=A$，$\therefore AB\perp$平面 ACD．

$\because AB\perp AC$，$AC=2$，$\tan\angle CBA=\frac{1}{2}$，$\therefore AB=2AC=4$．……………………7 分

$\because \triangle DAC$ 是边长为 2 的等边三角形，且 E 为 DA 的中点，

$\therefore CE\perp DA$，$CE=DC\sin 60^\circ=\sqrt{3}$，

$\therefore \triangle DEC$ 的面积 $S_{\triangle DEC}=\frac{1}{2}DE\cdot CE=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$．……………………9 分

由（Ⅰ）知，$CE\perp$平面 DAB，$\because BE\subset$平面 DAB，$\therefore CE\perp BE$，

$\therefore \triangle BEC$ 的面积为 $S_{\triangle ECB}=\frac{1}{2}CE\cdot BE=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{17}=\frac{\sqrt{51}}{2}$．……………………10 分

设点 D 到平面 BCE 的距离为 h，

$\because V_{B-CDE}=V_{D-BEC}$，$\therefore \frac{1}{3}S_{\triangle CDE}\cdot AB=\frac{1}{3}S_{\triangle ECB}\cdot h$，即 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{51}}{2}\times h$，

解得 $h=\frac{4\sqrt{17}}{17}$，即点 D 到平面 BCE 的距离为 $\frac{4\sqrt{17}}{17}$. ……………………12 分

20.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）由题意得，$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$，

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………4 分

（Ⅱ）联立 $\begin{cases}y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+m\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，解得 $x^2-\sqrt{3}mx+m^2-1=0$，

其中 $\Delta=3m^2-4\left(m^2-1\right)=-m^2+4>0$，解得 $-2<m<2$，

又 $m\neq 0$ 且 $m\neq-\sqrt{3}$，$\therefore -2<m<-\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}<m<0$ 或 $0<m<2$. ………6 分

设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，则 $x_1+x_2=\sqrt{3}m$，$x_1x_2=m^2-1$，

$$\therefore k_1\cdot k_2=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+m+\frac{\sqrt{3}}{2}}{x_1+1}\cdot\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}x_2+m+\frac{\sqrt{3}}{2}}{x_2+1}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}x_1x_2-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(m+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x_1+x_2\right)+\left(m+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{x_1x_2+\left(x_1+x_2\right)+1}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}\left(m^2-1\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(m+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sqrt{3}m+\left(m+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{m^2-1+\sqrt{3}m+1}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}m^2+\frac{\sqrt{3}}{4}m}{m^2+\sqrt{3}m}=\frac{1}{4}，$$ ……………………11 分

即 k_1k_2 是定值，且定值是 $\frac{1}{4}$. ……………………12 分

21.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）由题意得，$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=a+1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{(a+1)x+1}{x}$.

当 $a\geqslant -1$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ………… 2 分

当 $a<-1$ 时，令 $f'(x)>0$，解得 $x<-\dfrac{1}{a+1}$；令 $f'(x)<0$，解得 $x>-\dfrac{1}{a+1}$，

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0,-\dfrac{1}{a+1}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\dfrac{1}{a+1},+\infty\right)$ 上单调递减. ……………5 分

（Ⅱ）方法一：要证 $\dfrac{2e^x}{xe^2}+1+(a+1)x>f(x)$，即证 $\dfrac{2}{e^2}\cdot\dfrac{e^x}{x}-\ln x>0$. …………6 分

令 $g(x)=\dfrac{2}{e^2}\cdot\dfrac{e^x}{x}-\ln x$，则 $g'(x)=\dfrac{2(x-1)e^x-e^2x}{e^2x^2}$. ……………………7 分

令 $r(x)=2(x-1)e^x-e^2x$，则 $r'(x)=2xe^x-e^2$，

易得 $r'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $r'(1)=2e-e^2<0$，$r'(2)=3e^2>0$，

$\therefore$ 存在唯一的实数 $x_0\in(1,2)$，使得 $r'(x_0)=0$，

$\therefore r(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增. ……………………9 分

$\because r(0)<0$，$r(2)=0$，$\therefore$ 令 $r(x)>0$，解得 $x>2$；令 $r(x)<0$，解得 $0<x<2$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore g(x)\geqslant g(2)=1-\ln 2>0$. ……………………11 分

综上，$\dfrac{2}{e^2}\cdot\dfrac{e^x}{x}-\ln x>0$，即 $\dfrac{2e^x}{xe^2}+1+(a+1)x>f(x)$. ……………………12 分

方法二：要证 $\dfrac{2e^x}{xe^2}+1+(a+1)x>f(x)$，即证 $\dfrac{2}{e^2}\cdot\dfrac{e^x}{x}>\ln x$，

即证 $\dfrac{2}{e^2}\cdot\dfrac{e^x}{x^2}>\dfrac{\ln x}{x}$. ……………………7 分

令 $g(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$，则 $g'(x)=\dfrac{e^x}{x^2}=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$，

易得 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore g(x)_{\min}=g(2)=\dfrac{e^2}{4}$，$\therefore \dfrac{2}{e^2}\cdot\dfrac{e^x}{x^2}\geqslant\dfrac{2}{e^2}\times\dfrac{e^2}{4}=\dfrac{1}{2}$. …………………… 9 分

令 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

易得 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore h(x)_{\max}=h(e)=\dfrac{1}{e}<\dfrac{1}{2}$. ……………………11分

综上，$\frac{2}{e^2}\cdot\frac{e^x}{x^2}>\frac{\ln x}{x}$，即 $\frac{2e^x}{xe^2}+1+(a+1)x>f(x)$．……………………12 分

请考生从第 22、23 题中任选一题作答. 注意：只能做选定的题目，如果多做，则按所做的第一题记分，解答时请写清题号.

22.（本小题满分 10 分）选修 4–4：坐标系与参数方程

（Ⅰ）∵曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\cos\alpha\\ y=\sqrt{3}+\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），

消去 α，得 $(x-1)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=1$，即 $x^2+y^2-2x-2\sqrt{3}y+3=0$，

将 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 代入上式得 $\rho^2-2\rho\cos\theta-2\sqrt{3}\rho\sin\theta+3=0$，

即为曲线 C 的极坐标方程. ……………………5 分

（Ⅱ）将 $\theta=\theta_0$ 代入曲线 C 的极坐标方程，

得 $\rho^2-2\rho\cos\theta_0-2\sqrt{3}\rho\sin\theta_0+3=0$. ……………………6 分

设 $M(\rho_1,\theta_0)$，$N(\rho_2,\theta_0)$，则 $\rho_1+\rho_2=2\cos\theta_0+2\sqrt{3}\sin\theta_0$，……………7 分

$\therefore|OM|+|ON|=\rho_1+\rho_2=2\cos\theta_0+2\sqrt{3}\sin\theta_0=4\sin\left(\theta_0+\frac{\pi}{6}\right)$. ……………8 分

$\because\theta_0\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore\theta_0+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，$\therefore 4\sin\left(\theta_0+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(2\sqrt{3},4\right]$，

即 $|OM|+|ON|$ 的取值范围为 $\left(2\sqrt{3},4\right]$. ……………………10 分

23.（本小题满分 10 分）选修 4–5：不等式选讲

（Ⅰ）∵函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

$\therefore|2x-1|+|x-4|-m>0$，即 $m<|2x-1|+|x-4|$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上恒成立.

设 $g(x)=|2x-1|+|x-4|$，则 $g(x)=\begin{cases}-3x+5, x<\frac{1}{2}\\ x+3, \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 4,\\ 3x-5, x>4\end{cases}$

结合函数 $g(x)$ 的图象可知 $g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{2}$，

$\therefore m<\frac{7}{2}$，即集合 $M=\left\{m\middle|m<\frac{7}{2}\right\}$. ……………………5 分

（Ⅱ）由题意得，$0<a<\frac{7}{2}$，$0<b<\frac{7}{2}$，要证 $\frac{a+b}{4ab+49}<\frac{1}{14}$，

即证 $4ab+49>14(a+b)$，即证 $4ab+49-14(a+b)>0$，

即证 $(2a-7)(2b-7)>0$，……………8 分

又 $0<a<\frac{7}{2}$，$0<b<\frac{7}{2}$，$\therefore (2a-7)(2b-7)>0$，

故 $\frac{a+b}{4ab+49}<\frac{1}{14}$ 得证. ………………………10 分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’ 专业、专注、有态度 ‘’ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。