高二期中考试 · 数学

参考答案

1. B 【解析】由已知 $a_1(q-1)<0$，解得 $\begin{cases}a_1>0\\q<1(q\neq0)\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1<0\\q>1\end{cases}$，$a_n=a_1q^{n-1}$，

此时数列 $\{a_n\}$ 不一定是递减数列，

所以 $a_1(q-1)<0$ 是"数列 $\{a_n\}$ 递减"的非充分条件；

若数列 $\{a_n\}$ 为递减数列，可得 $\begin{cases}a_1>0\\0<q<1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1<0\\q>1\end{cases}$，所以 $a_1(q-1)<0$，

所以 $a_1(q-1)<0$ 是"数列 $\{a_n\}$ 递减"的必要条件.

所以 $a_1(q-1)<0$ 是"数列 $\{a_n\}$ 为递减数列"的必要不充分条件.

故选：B.

2. A 【解析】由题意可知 $P(B)=\dfrac{C_6^2+C_5^2}{C_{11}^2}=\dfrac{5}{11}$，$P(AB)=\dfrac{C_6^2}{C_{11}^2}=\dfrac{3}{11}$，

所以 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{3}{5}$.

故选：A.

3. D 【解析】由题意，$h'(t)=-10t+5$，故该运动员在起跳后 1 秒时的瞬时速度为 $h'(1)=-10+5=-5$.

故选：D.

4. C 【解析】因为 $f'(a)$、$f'(a+1)$ 分别是函数 $f(x)$ 在 $x=a$、$x=a+1$ 处的切线斜率，

又 $f(a+1)-f(a)=\dfrac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}$，是直线 AB 的斜率.

由图可知 $f'(a+1)<f(a+1)-f(a)<f'(a)$，

故选：C.

5. A 【解析】直线 $y=-x$ 与 $x+y-4=0$ 平行，且圆心在直线 $y=x$ 上. 设直线 $y=x$ 与直线 $y=-x$，$x+y-4=0$ 的交点分别为 A、B，则 $A(0,0)$、$B(2,2)$，由已知条件可得，线段 AB 为圆的直径，所以圆心坐标为线段 AB 的中点 $(1,1)$，半径为 $\dfrac{1}{2}|AB|=\sqrt{2}$，由此圆的方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$. 选 A.

6. D 【解析】设此人 2020 年 6 月 1 日存入银行的钱为 a_1 元，2021 年 6 月 1 日存入银行的钱为 a_2 元，以此类推，则 2025 年 6 月 1 日存入银行的钱为 a_6 元，那么此人 2025 年 6 月 1 日从银行取出的钱有 (a_6-a) 元.

由题意，得 $a_1=a$，$a_2=a(1+r)+a$，$a_3=a(1+r)^2+a(1+r)+a$，……，

$a_6=a(1+r)^5+a(1+r)^4+a(1+r)^3+a(1+r)^2+a(1+r)+a$，

所以 $a_6-a=a[(1+r)+(1+r)^2+\cdots+(1+r)^5]=a\cdot\dfrac{(1+r)[1-(1+r)^5]}{1-(1+r)}=\dfrac{a}{r}[(1+r)^6-(1+r)]$.

故选:D.

7. A 【解析】若 $a_n=2n-3$，则 $a_1=2-3=-1<0$，满足①，

$\forall n,s\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+s}=2(n+s)-3$，$a_n+a_s=2n-3+2s-3=2(n+s)-6$，

因为 $2(n+s)-3>2(n+s)-6$，所以 $\forall n,s\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+s}>a_n+a_s$，满足②，

故 A 正确；

若 $a_n=(-\frac{1}{2})^n$，则 $a_1=(-\frac{1}{2})^1=-\frac{1}{2}<0$，满足①，

$a_{n+t}=(-\frac{1}{2})^{n+t}$，令 $(-\frac{1}{2})^{n+t}>(-\frac{1}{2})^n$，

若 n 为奇数，此时 $(-\frac{1}{2})^n<0$，存在 $t\in\mathbf{N}^*$，且为奇数时，此时满足 $(-\frac{1}{2})^{n+t}>0>(-\frac{1}{2})^n$，

若 n 为偶数，此时 $(-\frac{1}{2})^n>0$，则此时不存在 $t\in\mathbf{N}^*$，使得 $(-\frac{1}{2})^{n+t}>(-\frac{1}{2})^n$，

综上:B 选项错误；

设 $a_n=-2n-1$，此时满足 $a_1=-2-1=-3<0$，

也满足 $\forall n,s\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+s}=-2(n+s)-1$，$a_n+a_s=-2n-1-2s-1=-2(n+s)-2$，

即 $\forall n,s\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+s}>a_n+a_s$.

但不满足③ $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$\exists t\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+t}>a_n$，

因为 $a_{n+t}=-2(n+t)-1=-2n-2t-1=a_n-2t<a_n$，

综上 C 选项错误；

不妨设 $a_n=(-2)^{n\cdot(-1)^n}$，满足 $a_1=-2<0$，且 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n=(-2)^{n\cdot(-1)^n}$，

当 n 为奇数时，取 $t=2$，使得 $a_{n+2}=-\frac{1}{2^{n+2}}>-\frac{1}{2^n}=a_n$，

当 n 为偶数时，取 $t=2$，使得 $a_{n+2}=2^{n+2}>2^n=a_n$，

故 $\{a_n\}$ 为“t 数列”，

但此时不满足 $\forall n,s\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+s}>a_n+a_s$，不妨取 $n=1,s=2$，

则 $a_1=-\frac{1}{2}$，$a_2=4$，$a_3=-\frac{1}{8}$，而 $a_{1+2}=-\frac{1}{8}<-\frac{1}{2}+4=a_1+a_2$，

则 $\{a_n\}$ 不是“s 数列”，D 选项错误.

故选:A.

8. C 【解析】双曲线 $C:\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$ 的右焦点为 $F(4,0)$，两条渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$. 由过点 F 的直线交两渐近线于点 P,Q，不妨设点 P 在第一象限，点 Q 在第四象限，$\angle OPQ=90°$，$\mathrm{Rt}\triangle POF$ 中，$\angle POF=30°$，$|OF|=4$，故 $|OP|=2\sqrt{3}$，又 $\angle POQ=60°$，故 $|PQ|=\sqrt{3}|OP|=6$. 选 C.

9. BCD 【解析】由题得 $\bar{x}=3$，$\bar{y}=414.08$，代入可得 $\hat{b}=149.24$，A 项错误；

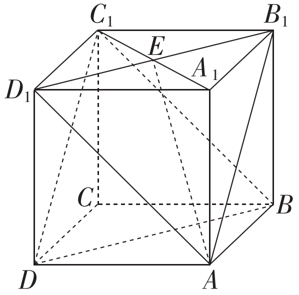
2023 年的年份代码为 7，代入 $\hat{y}=149.24x-33.64$ 得 $\hat{y}=1011.04$，高于 1000 万辆，B 项正确；

2017—2021 年全国新能源汽车保有量呈增长趋势，C 项显然正确；

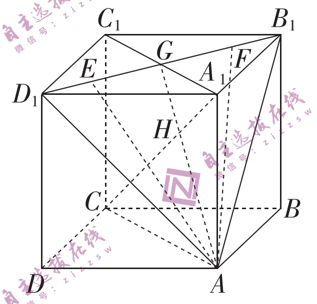
将 $x=5$，代入 $\hat{y}=149.24x-33.64$ 得 $\hat{y}=712.56$，相应的残差为 $784-712.56=71.44$，D 项正确，

故选：BCD.

10. ABC 【解析】连接 D_1A，AB_1，C_1D，BD，C_1B，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$BD /\!/ B_1D_1$，$AB_1 /\!/ DC_1$，从而易得：平面 $AB_1D_1 /\!/$ 平面 BDC_1，又 $AE\subset$ 平面 AB_1D_1，$\therefore AE /\!/$ 平面 C_1BD，选项 A 正确.



连接 D_1A，AB_1，C_1A_1 与 B_1D_1 相交于点 G，A_1C 与 AG 交于点 H，$A_1G=\sqrt{2}$，$AG=\sqrt{4+2}=\sqrt{6}$，$GH=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$A_1C=\sqrt{8+4}=2\sqrt{3}$，$A_1H=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$\therefore A_1H^2+GH^2=A_1G^2$，$\therefore A_1C\perp AG$，易知 $B_1D_1\perp$ 平面 ACC_1A_1，即 $B_1D_1\perp A_1C_1$，由线面垂直的判定可知，$A_1C\perp$ 平面 AB_1D_1，即 $A_1C\perp$ 平面 AEF，故 B 正确；



$\triangle AEF$ 中，$EF=1$，点 A 到 B_1D_1 距离不变，$\therefore\triangle AEF$ 的面积为定值，且 B 到平面 AB_1D_1 的距离为定值，即 B 到平面 AEF 的距离为定值，故三棱锥 $A-BEF$ 的体积为定值，故 C 正确，D 错误；

故选：ABC.

11. ABC 【解析】对于 A，曲线的切线和曲线的交点不一定唯一，如曲线 $y=x^3+1$ 在 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{8}\right)$ 处的切线与曲线有另外一个交点(1,2)，故 A 错误；

对于 B，过曲线上的一点作曲线的切线，这点不一定是切点，如经过曲线上一点，但是不是在该点与曲线相切而是在其他地方相切，比如 $y=x^3$ 与 $y=3x-2$ 相切于点(1,1)，同时经过另外一点(a,b)，我们就可以说过点(a,b)的直线 $y=3x-2$ 与曲线 $y=x^3$ 相切，但切点是(1,1)而不是(a,b)，故 B 错误；

对于 C，若 $f'(x_0)$不存在，则曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处无切线是错误的，如曲线在某点处的切线垂直于 x 轴，此时 $f'(x_0)$不存在，但曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处有切线，

故 C 错误；

对于 D,函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $(0,0)$ 有切线,但导数不存在.故 D 正确.

故选:ABC.

12. BC 【解析】对于 A,由 $S_n=n^2+2n-1$,当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=2$,

由 $a_n=2n+1$,当 $n=1$ 时,$a_1=3$,所以,A 不正确；

对于 B,若 $a_n=3n-23$,当 $n=1$ 时,$a_1=-20$,则 $a_7<0,a_8>0$,

所以当 $n=7$ 时,S_n 取得最小值为 $S_7=\frac{7(a_1+a_7)}{2}=\frac{7(-20-2)}{2}=-77$,

所以,B 正确；

对于 C,若 $a_n=4n-3$,设数列 $\{(-1)^n a_n\}$ 的前 n 项和为 T_n,

所以 $T_{17}=-a_1+a_2-a_3+a_4+\cdots+a_{16}-a_{17}$

$=(-1+5)+(-9+13)+\cdots+61-65=4\times8-65=-33$,故 C 正确；

对于 D,数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,且 $a_{1011}+a_{1012}<0,a_{1000}+a_{1024}>0$,

则 $a_{1011}+a_{1012}=a_1+a_{2022}<0,a_{1000}+a_{1024}=a_1+a_{2023}>0$,

所以 $S_{2022}=\frac{2022(a_1+a_{2022})}{2}<0,S_{2023}=\frac{2023(a_1+a_{2023})}{2}>0$,

当 $S_n<0$ 时,n 的最大值为 2022,所以 D 不正确.

故选:BC.

13. $3x+y-7=0$ 【解析】$\because f(x)=x\ln x+\frac{4}{x}$,$\therefore f'(x)=\ln x+1-\frac{4}{x^2}$,

$\therefore f(1)=4,f'(1)=-3$,$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,4)$ 处的切线方程为:$y-4=-3(x-1)$,即 $3x+y-7=0$,

故答案为:$3x+y-7=0$.

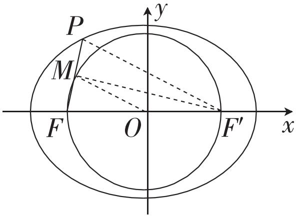
14. 480 【解析】从 A 开始涂色,A 有 6 种涂色方法,B 有 5 种涂色方法,C 有 4 种涂色方法；由 D 区与 B,C 涂不同色,与 A 区颜色可以同色也可以不同色,则 D 有 4 种涂色方法.

故共有 $6\times5\times4\times4=480$ 种涂色方法.

故答案为:480.

15. 5 【解析】圆心 $(0,0)$ 到直线的距离为 $d=\frac{8}{\sqrt{1^2+3}}=4$,故圆的半径 $r=\sqrt{d^2+\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2}=5$.

16. $\sqrt{15}$ 【解析】如图,记椭圆的右焦点为 F',设 PF 的中点为 M,由题意知 $a=3,b=\sqrt{5}$,故 $c=2$,连接 OM,PF',则 $|OM|=|OF|=2$,又因为 M 为 PF 的中点,所以 $|PF'|=2|OM|$,$PF'/\!/OM$,所以 $|PF'|=4$,又因为 P 在椭圆上,所以 $|PF'|+|PF|=6$,则 $|PF|=2$,在 $\triangle PFF'$ 中,$|PF'|=|FF'|=4$,$|PF|=2$,连接 $F'M$,则 $F'M\perp PF$,所以 $|F'M|=\sqrt{|FF'|^2-|FM|^2}=\sqrt{16-1}=\sqrt{15}$,$\therefore k_{PF}=\tan\angle PFF'=\frac{|F'M|}{|FM|}=\sqrt{15}$,即直线 PF 的斜率为 $\sqrt{15}$.



17. 解:(1)选①②,由已知 $a_2=4,a_{n+1}-a_n=2$,

得$\begin{cases}a_1+d=4,\\d=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=2,\\d=2.\end{cases}$

∴数列$\{a_n\}$是首项为 2,公差为 2 的等差数列,

∴数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d=2+(n-1)\times 2=2n$.

选②③,由已知 $a_{n+1}-a_n=2,S_2=6$,

得$\begin{cases}d=2,\\2a_1+d=6,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=2,\\d=2.\end{cases}$

∴数列$\{a_n\}$是首项为 2,公差为 2 的等差数列,

∴数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d=2+(n-1)\times 2=2n$.

选①③,由已知 $a_2=4,S_2=6$,

得$\begin{cases}a_1+d=4,\\2a_1+d=6,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=2,\\d=2.\end{cases}$ …………………… 2 分

∴数列$\{a_n\}$是首项为 2,公差为 2 的等差数列, …………………… 3 分

∴数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d=2+(n-1)\times 2=2n$. …………………… 4 分

(2)由(1)知,$a_n=2n$,∴$b_3=a_2=4,b_4=a_4=8$, …………………… 5 分

∴等比数列$\{b_n\}$的公比 $q=\dfrac{b_4}{b_3}=2$,故 $b_1=\dfrac{b_3}{q^2}=\dfrac{4}{4}=1$, …………………… 7 分

∴等比数列$\{b_n\}$的通项公式为 $b_n=b_1q^{n-1}=2^{n-1}$, …………………… 8 分

∴数列$\{a_n+b_n\}$的前 n 项和 $T_n=(2+4+6+\cdots+2n)+(1+2+4+\cdots+2^{n-1})$

$=\dfrac{(2+2n)n}{2}+\dfrac{1-2^n}{1-2}=n^2+n+2^n-1$. …………………… 10 分

18. 解:(1)$y'=\cos x-x\sin x=-\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ …………………… 4 分

(2)$y=\left(\dfrac{1}{x}+x\right)e^x$,$y'=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+x+1e^x=\dfrac{x^3+x^2-+x-1}{x^2}e^x$. …………………… 8 分

(3)$y=\dfrac{e^2x^2+2e^2x-e^2}{e^x}$,

$y'=\dfrac{(2e^2x+2e^2-e^2x^2-2e^2x+e^2)e^x}{(e^x)^2}=(-x^2+3)e^{2-x}$ …………………… 12 分

19. 解:(1)数列$\{a_n\}$满足:$a_1=1$,当 $n\geqslant 2$ 时,$(n-1)a_n^2-na_{n-1}^2=n(n-1)$,整理得:$\dfrac{a_n^2}{n}-\dfrac{a_{n-1}^2}{n-1}=1$, …………………… 2 分

∴数列$\left\{\dfrac{a_n^2}{n}\right\}$是以 1 为首项,1 为公差的等差数列. …………………… 3 分

所以$\dfrac{a_n^2}{n}=1+n-1=n$,∴$a_n^2=n^2$,故 $a_n=n$. …………………… 5 分

(2)$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{n}{2^n}$, …………………… 6 分

∴$T_n=1\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{1}{2^2}+3\times\dfrac{1}{2^3}+\cdots+n\cdot\dfrac{1}{2^n}$①,

则$\dfrac{1}{2}T_n=1\times\dfrac{1}{2^2}+2\times\dfrac{1}{2^3}+3\times\dfrac{1}{2^4}+\cdots+n\cdot\dfrac{1}{2^{n+1}}$②,

①－②得：$\frac{1}{2}T_n=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n})-n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$， …………………… 10 分

$\therefore T_n=2-\frac{n+2}{2^n}$. …………………………………………………………………… 12 分

20.(1)证明：因为 $AC\perp AB$，$AC\perp AA_1$，$AB\cap AA_1=A_1$，所以 $AC\perp$ 平面 AA_1B_1B，所以 $AC\perp BE$. ……………………………………………………………………………………………… 3 分

$AC\perp BE$，$BE\perp AB_1$，$AC\cap AB_1=A$，所以 $BE\perp$ 平面 AB_1C. ………………………………… 5 分

(2)对于三棱锥 B_1-ACD 有，$S_{\triangle ADC}=2$，

$V_{B_1-ACD}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ADC}\cdot AB=\frac{4}{3}$. ………………………………………………………………… 7 分

在 $\mathrm{Rt}\triangle AB_1C$ 中，$AC=2$，$AB_1=2\sqrt{5}$，故 $S_{\triangle AB_1C}=2\sqrt{5}$. ……………………………………… 9 分

故点 D 到平面 AB_1C 的距离 $d=\frac{3V_{B_1-ACD}}{S_{\triangle AB_1C}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. …………………………………………… 10 分

又 $B_1D=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$，故所求角的正弦值为 $\sin\theta=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{15}$. ………… 12 分

21.解：(1)因为头胎为女孩的频率为 0.5，所以头胎为女孩的总户数为 $200\times0.5=100$.

因为生二孩的概率为 0.525，所以生二孩的总户数为 $200\times0.525=105$. …………… 1 分

2×2 列联表如下：

	生二孩	不生二孩	合计
头胎为女孩	60	40	100
头胎为男孩	45	55	100
合计	105	95	200

……………………………………………………………………………………………………… 3 分

$k=\frac{200\times(60\times55-45\times40)^2}{105\times95\times100\times100}=\frac{600}{133}>3.841$， ……………………………………… 4 分

故依据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验分析，是否生二孩与头胎的男女情况有关联；……

……………………………………………………………………………………………… 5 分

(2)在抽取的 200 户家庭的样本中，按照分层抽样的方法在生二孩的家庭中抽取了 7 户，则这 7 户家庭中，头胎生女孩的户数为 4，头胎生男孩的户数为 3，则 X 的可能取值为 1，2，3，4， ……………………………………………………………………………………… 6 分

$P(X=1)=\frac{C_4^1C_3^3}{C_7^4}=\frac{4}{35}$，

$P(X=2)=\frac{C_4^2C_3^2}{C_7^4}=\frac{18}{35}$，

$P(X=3)=\frac{C_4^3C_3^1}{C_7^4}=\frac{12}{35}$，

$P(X=4)=\frac{C_4^4}{C_7^4}=\frac{1}{35}$，

X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

……………………………………………………………………………………… 10 分

$E(X)=1\times\frac{4}{35}+2\times\frac{18}{35}+3\times\frac{12}{35}+4\times\frac{1}{35}=\frac{16}{7}$. ………………………………………… 12 分

22. 解:(1)设点 $A\left(x_0,\frac{x_0^2}{4}\right)$,$AD$ 的中点为 $E\left(\frac{x_0}{2},\frac{4+\frac{x_0^2}{4}}{2}\right)$,直径 $2r=AD=\sqrt{x_0^2+\left(4-\frac{x_0^2}{4}\right)^2}$.

设截得的弦长为 FM,圆心到弦的距离为 d,则

$$\left(\frac{1}{2}|FM|\right)^2=r^2-d^2=\frac{x_0^2+\left(4-\frac{x_0^2}{4}\right)^2}{4}-\left(\frac{4+\frac{x_0^2}{4}}{2}-t\right)^2.$$

得 $\frac{1}{4}|FM|^2=\frac{t-3}{4}x_0^2+4t-t^2$ 与 x_0 无关,所以 $t=3$. ………………………………… 6 分

(2)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,线段 AB 的中点为 G.

联立 $\begin{cases}y=x+m,\\x^2=4y,\end{cases}$ 得 $x^2-4x-4m=0$.

由于 $\Delta>0$,则 $16+16m>0$,即 $m>-1$.

而 $x_1+x_2=4$,$x_1x_2=-4m$,$y_1+y_2=4+2m$,所以 $G(2,2+m)$.

从则有 $k_{DG}=\frac{m-2}{2}=-1$,即 $m=0$,符合 $m>-1$.

而 $|AB|=\sqrt{1+1}\,|x_1-x_2|=4\sqrt{2}\sqrt{1+m}=4\sqrt{2}$,点 E 到 AB 的距离为 $\frac{|m-3|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$.

所以,$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{2}\sqrt{1+m}\cdot\frac{|m-3|}{\sqrt{2}}=6$. ………………………………………… 12 分