

中学生标准学术能力诊断性测试 2018 年 3 月测试

数学文科试卷

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | 1 < 2^x \leq 4\}$, $B = \{x | y = \ln(x-1)\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{x | 1 \leq x < 2\}$ B. $\{x | 1 < x \leq 2\}$
C. $\{x | 0 < x \leq 2\}$ D. $\{x | 0 \leq x < 2\}$

2. 在某次测量中得到的 A 样本数据如下: 82, 84, 84, 86, 86, 86, 88, 88, 88, 88. 若 B 样本数据恰好是 A 样本数据每个都加 2 后所得数据, 则 A, B 两样本的下列数字特征对应相同的是

- A. 众数 B. 平均数
C. 中位数 D. 标准差

3. 若复数 z 满足 $2z + \bar{z} = 3 + 2i$, 其中 i 为虚数单位, 则 z 的虚部为

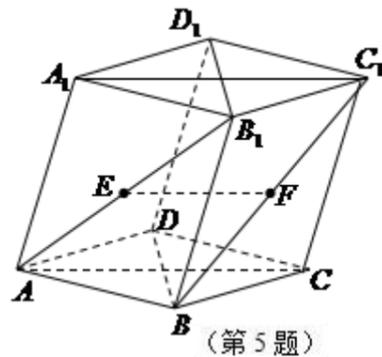
- A. -2 B. 2 C. -1 D. 1

4. 在区间 $[0, 2]$ 上任取两个实数 a, b , 方程 $x^2 + ax + b^2 = 0$ 的两根均为实数的概率为

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{3}{4}$

5. 如图, 已知四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, 且 E, F 分别是 AB_1, BC_1 的中点. 给出下列结论, 其中正确结论的序号是

- ① $EF \parallel$ 平面 ACC_1A_1
② $EF \perp$ 平面 A_1ABB_1
③ $EF \perp BD$
④ $EF \perp$ 平面 BB_1D_1D



- A. ①② B. ①③ C. ③④ D. ②④

6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线的方程是 $y = \frac{1}{2}x$,

且双曲线的一个焦点在抛物线 $y^2 = 4\sqrt{5}x$ 的准线上, 则双曲线的方程为

- A. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ B. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$
C. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ D. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$

7. 若实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} (x-y-1)(2x+y-5) \geq 0, \\ 0 \leq x \leq 2, \end{cases}$ 则 $z = 2x - y$ 的取值范围是

- A. $[-5, 3]$ B. $[-5, 1]$
C. $[1, 3]$ D. $[-5, 5]$

8. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的三边分别为 a, b, c , 若 $\triangle ABC$ 的面积为 6, $c = 5$, $\tan A = \frac{4}{3}$, 则实数 a 的值为

- A. $2\sqrt{13}$ B. 2
C. 4 D. $\sqrt{17}$

9. 已知直线 $x + y + m = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 交于不同的两点 A, B , O 是坐标原点, $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| > |\overrightarrow{AB}|$, 则实数 m 的取值范围是

- A. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ B. $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$
C. $(-2\sqrt{2}, -2) \cup (2, 2\sqrt{2})$ D. $(-2, 2)$

10. 设 a 为实常数, $y = f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 且当 $x < 0$, $f(x) = 4x + \frac{a^2}{x} + 5$. 若 $f(x) \geq a + 1$ 对一切 $x \geq 0$ 成立, 则 a 的取值范围是

- A. $a \leq -1$ B. $a \geq 2$
C. $a \leq -\frac{6}{5}$ 或 $a \geq 2$ D. $a \leq -\frac{6}{5}$

11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 点 M, N, F 分别为椭圆 C 的左顶点、上顶点、左焦点, 若 $\angle MFN = \angle NMF + 90^\circ$, 则椭圆的离心率是

- A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. 点 O 为锐角三角形 $\triangle ABC$ 的外心, 若 $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, 且 $C = \frac{\pi}{3}$, 则 $x + y$ 的取值范围是

- A. $[-1, 0)$ B. $[-2, 0)$
C. $[-2, -1)$ D. $(-2, -1]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $\sin \alpha = \cos \alpha + \frac{1}{5}$, 且 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $\frac{\cos 2\alpha}{\sin(\alpha - \frac{\pi}{4})} =$ _____.

14. 根据如图所示的算法, 可知输出的结果为 _____.

```
S=0
n=0
WHILE S<=63
    S=S+2^n
    n=n+1
END WHILE
PRINT n
```

15. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB = BC = AC = 2$, $PC \perp$ 平面 ABC , $PC = 4$, 则该三棱锥的外接球表面积为 _____.

16. 若函数 $f(x) = \frac{k}{x} - e^x$ 有两个零点, 则实数 k 的取值范围为 _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分

17. (12 分) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，并且 $2a_1 + 3a_2 = 33$,

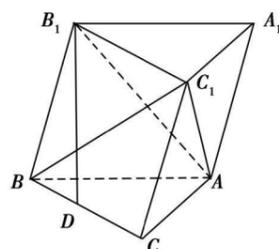
$a_2 a_4 = 27a_3$. 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \log_3 a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^+$.

(I) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(II) 若 $c_n = a_n \cdot b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (12 分) 如图，在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AC=BC=AA_1=a$, $\angle ACB=90^\circ$,

又点 B_1 在底面 ABC 上的射影 D 落在 BC 上，且 $BC=3BD$.



(第 18 题)

(I) 求证： $AC \perp$ 平面 BB_1C_1C ;

(II) 若三棱锥 $B_1-AA_1C_1$ 的体积为 $24\sqrt{2}$, 求实数 a 的值.

19. (12 分) 为了对中考成绩进行分析，某中学从分数在 70 分(满分 100 分)

以上的全体同学中随机抽出 8 位，他们的数学、物理分数对应如下表：

数学 X	75	76	76	77	83	84	84	85
物理 Y	77	78	81	81	81	82	83	85

(I) 若分数在 80 分以上为“优”，否则为“一般”，是否有 90% 的把握认为数学“优”与物理“优”有关？

(II) 从物理或数学分数在 80 分以上的同学中任意挑选 2 名，求这 2 名同

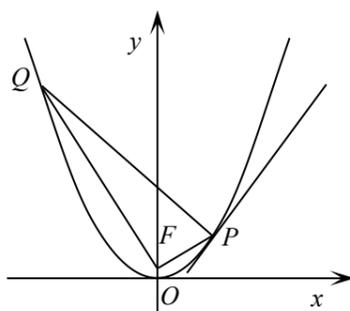
学的数学与物理分数恰好都在 80 分以上的概率.

附：

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.010	0.005
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

20. (12 分) 如图，已知抛物线 C 的顶点在原点，焦点为 $F(0, 1)$.



(第 20 题)

(I) 求抛物线 C 的方程;

(II) 已知抛物线 C 与直线 $y = -\frac{1}{2}x + b$ 相交于 P 、 Q 两点(点 P 在第一

象限内)，且 $PF \perp QF$, 求抛物线 C 在点 P 处的切线方程.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = x \ln x$, $g(x) = -x^2 + ax - 3$.

(I) 求函数 $f(x)$ 在 $[t, t+1]$ ($t > 0$) 上的最小值;

(II) 若对任意的 $x \in [\frac{1}{e^2}, e^2]$ (e 是自然对数的底数, $e = 2.71828\dots$), 不

等式 $f(x) \geq \frac{1}{2}g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

(二) 选考题：共 10 分。请考生在 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4：坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中，已知圆锥曲线 $C: \begin{cases} x = \sqrt{3} \cos \theta, \\ y = \sqrt{2} \sin \theta, \end{cases}$ (θ 为参数) 和直

线 $l: \begin{cases} x = -1 + t \cos \alpha, \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数, α 为 l 的倾斜角, 且 $0 < \alpha < \pi$) 相交

于不同两点 A , B .

(I) 当 $\alpha = 30^\circ$ 时，求交点 A 、 B 的坐标;

(II) 若 $|PA| \cdot |PB| = \frac{8}{5}$, 其中 $P(-1, 0)$, 求直线 l 的斜率.

23. [选修 4-5：不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = |2x - a| + |x + 3|$, $g(x) = 2x + 4$, a 是实数.

(I) 当 $a = 1$ 时，求不等式 $f(x) \geq g(x)$ 的解集;

(II) 设 $a > -6$, 当 $x \in [-3, \frac{a}{2}]$ 时, $f(x) \geq g(x)$, 求 a 的取值范围.