大庆铁人中学2021级高二学年下学期期中考试

数学答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	D	B	A	C	D	B	D	AD	BC	ACD	AC

13. 0.99　14. 2047　15. 0.4/$\frac{2}{5}$　16. 5040

17. 解：因为第二项与第三项的二项式系数之比是$2:5$，

则$\frac{C_n^1}{C_n^2}=\frac{2}{5}$，即$\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{2}{5}$，解得$n=0$(舍)或$n=6$，

所以n的值为6.

$(2x+\frac{1}{\sqrt{x}})^6$的展开式的通项为$T_{k+1}=C_6^k(2x)^{6-k}(\frac{1}{\sqrt{x}})^k=C_6^k\,2^{6-k}x^{6-\frac{3k}{2}}\ (0\le k\le 6,k\in N)$，

（1）当$6-\frac{3k}{2}=0$时，即k=4时$T_5=C_6^4 2^2=60$

所以常数项为60

（2）设第k+1项系数最大，由通项得

令$\begin{cases}C_6^k 2^{6-k}\ge C_6^{k-1}2^{7-k}\\ C_6^k 2^{6-k}\ge C_6^{k+1}2^{5-k}\end{cases}$，解得$\frac{4}{3}\le k\le\frac{7}{3}$，又$\because k\in N$，$\therefore k=2$，

$\therefore$展开式中系数最大的项为第3项，且$T_3=240x^3$.

18. 解：（1）$b_n=\log_2(a_n+1),b_1=\log_2(3+1)=2,$

$\because a_{n+1}=a_n^2+2a_n,\therefore a_{n+1}+1=a_n^2+2a_n+1=(a_n+1)^2$，

$\therefore\log_2(a_{n+1}+1)=2\log_2(a_n+1)$, 又因为$b_1=1$.

$\therefore\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\log_2(a_{n+1}+1)}{\log_2(a_n+1)}=2,$

所以数列$\{b_n\}$是以2为首项，2为公比的等比数列.

（2）由（1）可得，$b_n=2^n$，所以$c_n=\frac{n}{2^n}+1$，

设$d_n=\frac{n}{2^n}$, 设其前n项和为S_n，

则$S_n=\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$, ①

$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$, ②

①减②得：

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n-1}}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}},$$

所以$S_n=2-\frac{n+2}{2^n}$,

所以$T_n=S_n+n=n+2-\frac{n+2}{2^n}$.

19. 解：（1）由题意可知，$X\sim B\left(2,\frac{1}{4}\right)$，

则$P(X=0)=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$，$P(X=1)=C_2^1\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$，$P(X=2)=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$，

所以，随机变量X的分布列如下表所示：

X	0	1	2
P	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$

所以，$E(X)=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

（2）解：对于方案一："机器发生故障时不能及时维修"等价于"甲、乙、丙三人中，至少有一

人负责的2台机器同时发生故障”，考查反面处理这个问题.

设机器发生故障时不能及时维修的概率为 P_1, 则

其概率为 $P_1=1-\left[1-P(X=2)\right]^3=1-\left(1-\frac{1}{16}\right)^3=\frac{721}{4096}$.

对于方案二：设机器发生故障时不能及时维修的概率为 P_2, 则

$$P_2=1-\left(\frac{3}{4}\right)^6-C_6^1\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^5-C_6^2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4=1-\frac{3^6+6\times3^5+15\times3^4}{4096}=\frac{347}{2048},$$

所以，$P_2<P_1$，即方案二能让故障机器更大概率得到及时维修，使得工厂的生产效率更高.

20. 解：（1）$f'(x)=\frac{1}{2x}-1$, (x>0)

令 $f'(x)=\frac{1}{2x}-1=0$，则 $x=\frac{1}{2}$,

当 $x>\frac{1}{2}$时，$f'(x)=\frac{1}{2x}-1<0$, f(x)的单调减区间为（$\frac{1}{2}$，$+\infty$）

当 $0<x<\frac{1}{2}$时，$f'(x)=\frac{1}{2x}-1>0$, f(x)的单调增区间为（0，$\frac{1}{2}$）

综上所述，f(x)的单调减区间为（$\frac{1}{2}$，$+\infty$），f(x)的单调增区间为（0，$\frac{1}{2}$）

（2）$g(x)=\frac{1}{2}\ln x-x+mx^2, g'(x)=\frac{4mx^2-2x+1}{2x},(x>0)$,

$\because x_1,x_2$为两个极值点，$\therefore 4mx^2-2x+1=0$有两个不等的正根x_1,x_2，

$\therefore m\neq0,\Delta=4-16m>0$，$x_1+x_2=\frac{1}{2m}>0, x_1x_2=\frac{1}{4m}>0$，得 $0<m<\frac{1}{4}$，

$$g(x_1)+g(x_2)=\frac{1}{2}\ln x_1x_2-(x_1+x_2)+m\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{4m}-\frac{1}{4m}-\frac{1}{2},$$

令 $t=\frac{1}{4m},(t>1)$，得 $g(x_1)+g(x_2)=h(t)=\frac{1}{2}\ln t-t-\frac{1}{2}$，

$h'(t)=\frac{1}{2t}-1$，因为 t>1，则 $0<\frac{1}{2t}<\frac{1}{2}$，则 $h'(t)=\frac{1}{2t}-1<0$，

$\therefore h(t)$在$(1,+\infty)$递减，$\therefore h(t)<h(1)=-\frac{3}{2}$，

即 $g(x_1)+g(x_2)$的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$.

21. 解：（1）设甲，乙，丙被定为一级工程师的事件分别为 A_1，A_2，A_3，

事件 C 表示三位工程师中恰有两位被定为一级工程师.

$P(A_1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，$P(A_2)=P(A_3)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

所以 $P(C)=P\left(\overline{A_1}A_2A_3\right)+P\left(A_1\overline{A_2}A_3\right)+P\left(A_1A_2\overline{A_3}\right)$

$=\frac{5}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$

经过本次考核，甲，乙，丙三位工程师中恰有两位被定为一级工程师的概率为$\frac{1}{6}$

（2）方案一：设甲，乙，丙获得的奖金分别为 X，Y，Z，则 X，Y，Z 的取值均为 2000，1500，500；

则 $P(X=2000)=P(A_1)=\frac{1}{6}$，$P(X=1500)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，$P(X=500)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$；

故 $E(X)=2000\times\frac{1}{6}+1500\times\frac{1}{6}+500\times\frac{2}{3}=\frac{2750}{3}$

$P(Y=2000)=P(Z=2000)=P(A_2)=\frac{1}{3}$,

$P(Y=1500)=P(Z=1500)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$,

$P(Y=500)=P(Z=500)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$；

$E(Y)=E(Z)=2000\times\frac{1}{3}+1500\times\frac{1}{3}+500\times\frac{1}{3}=\frac{4000}{3}$；

$E(X)+E(Y)+E(Z)=\frac{2750}{3}+2\times\frac{4000}{3}=\frac{10750}{3}$.

方案二：设甲，乙，丙获得的奖金分别为 X'，Y'，Z'，则 X'，Y'，Z' 的取值均为 2000，0；

$P(X'=2000)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$，$E(X')=2000\times\frac{1}{3}=\frac{2000}{3}$；

$P(Y'=2000)=P(Z'=2000)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$，$E(Y')=E(Z')=2000\times\frac{2}{3}=\frac{4000}{3}$，

$E(X')+E(Y')+E(Z')=\frac{2000}{3}+2\times\frac{4000}{3}=\frac{10000}{3}$

显然 $\frac{10750}{3}>\frac{10000}{3}$，从奖励期望值角度看，公司采用方案二，奖励支出会更少.

22. 解：（1）当 $a=2$ 时，则 $f(x)=2e^{2x}-x, f'(x)=4e^{2x}-1$，

可得 $f(0)=2, f'(0)=3$，

即切点坐标为 $(0,2)$，斜率 $k=3$，

所以切线方程 $y=3x+2$.

（2）由题意可得：$f'(x)=2ae^{2x}+(a-2)e^{x}-1=(ae^{x}-1)(2e^{x}+1)$，

因为 $2e^{x}+1>0$，则有：

（i）当 $a\le 0$ 时，则 $ae^{x}-1<0$，即 $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，至多有 1 个零点，不合题意；

（ii）当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$ 时，则 $x>-\ln a$；令 $f'(x)<0$ 时，则 $x<-\ln a$；

则 $f(x)$ 在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减，

且当 x 趋近于 $-\infty$ 时，$f(x)$ 趋近于 $+\infty$，当 x 趋近于 $+\infty$ 时，$f(x)$ 趋近于 $+\infty$，

若 $f(x)$ 有两个零点，则 $f(-\ln a)=\ln a-\frac{1}{a}+1<0$，

构建 $g(a)=\ln a-\frac{1}{a}+1$，则 $g(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $g(1)=0$，

若 $g(a)<0$，则 $0<a<1$；

综上所述：a 的取值范围为 $(0,1)$.

（3）由（2）可知：当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

则 $f(x)=e^{2x}-e^{x}-x\ge f(0)=0$，

可得 $e^{2x}-x\ge e^{x}$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立；

构建 $d(x)=e^{x}-\frac{e}{6}(x^{3}+3x+2)$，则 $d'(x)=e^{x}-\frac{e}{2}(x^{2}+1)$，

构建 $h(x)=d'(x)$，则 $h'(x)=e^{x}-ex$，

构建 $\varphi(x)=h'(x)$，则 $\varphi'(x)=e^{x}-e$，

令 $\varphi'(x)>0$，解得 $x>1$；令 $\varphi'(x)<0$，解得 $x<1$；

则 $\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，所以 $\varphi(x)\ge\varphi(1)=0$，

即 $h'(x)\ge 0$ 恒成立，则 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且 $h(1)=0$，

令 $h(x)>0$，解得 $x>1$；令 $h(x)<0$，解得 $x<1$；

即当 $x>1$ 时，$d'(x)>0$；当 $x<1$ 时，$d'(x)<0$；

则 $d(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，所以 $d(x)\ge d(1)=0$，

所以 $e^{x}\ge\frac{e}{6}(x^{3}+3x+2)$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立；

综上所述：等号不能同时取到，所以 $e^{2x}-x>\frac{e}{6}(x^{3}+3x+2)$.