绝密★启用前

“天一大联考·皖豫名校联盟”2023届高中毕业班第一次考试

数　学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.公众号拾穗者的杂货铺x思维方糖研究所
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $U=\{x|x>0\}$，$A=\{x|y=\sqrt{x-2}\}$，则$\complement_U A=$

A. $\{x|0<x\leqslant 2\}$　　B. $\{x|x\geqslant 2\}$　　C. $\{x|0<x<2\}$　　D. $\{x|x<2\}$

2. 命题 p：$\forall m\in[0,1]$，$m^2-2m\leqslant 0$，则$\neg p$ 为

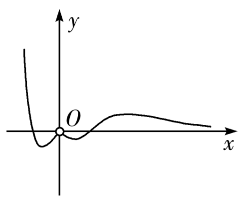
A. $\exists m\in[0,1]$，使得 $m^2-2m\leqslant 0$　　B. $\forall m\in[0,1]$，$m^2-2m>0$

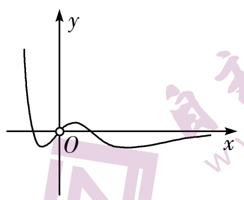
C. $\exists m\in[0,1]$，使得 $m^2-2m>0$　　D. $\exists m\in[0,1]$，使得 $m^2-2m\geqslant 0$

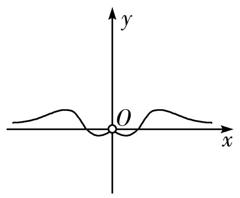
3. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，$f'(-2)=-2$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-2-4\Delta x)-f(-2)}{\Delta x}=$

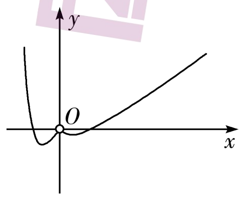
A. -8　　B. -2　　C. 2　　D. 8

4. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2\ln|x|}{e^x}$ 的部分图象大致为

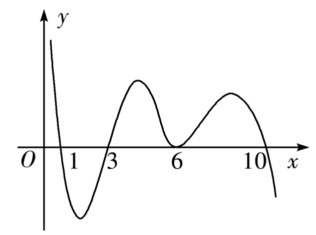
A. 

B. 

C. 

D. 

5. 已知定义域为 $(0,+\infty)$ 的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且函数 $g(x)=(\log_3 x-1)\cdot f'(x)$ 的部分图象如图所示，则下列说法中正确的是



A. $f(x)$ 有极小值 $f(6)$，极大值 $f(1)$

B. $f(x)$ 有极小值 $f(6)$，极大值 $f(10)$

C. $f(x)$ 有极小值 $f(1)$，极大值 $f(3)$ 和 $f(10)$

D. $f(x)$ 有极小值 $f(1)$，极大值 $f(10)$

6. 经过政府加大投入，一座老城被改建为一座朝气蓬勃的新城市. 2021年该市人口约为20万人，2022年该市人口约为30万人，假设今后该市人口每年以从2021年到2022年人口数的增长率进行增长. 若从2021年开始 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 年后该市人口首次超过200万人，则 $n=$

参考数据：$\lg 2\approx 0.30$，$\lg 3\approx 0.48$

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

7. 已知 $a=2-\ln 2$，$b=\sqrt{e}-\dfrac{1}{2}$，$c=e-1$，则

A. $c>a>b$　　B. $c>b>a$　　C. $a>c>b$　　D. $a>b>c$

8. 已知函数 $f(x)=a(\ln x-1)-x(a\in\mathbf{R})$ 在区间 $(e,+\infty)$ 内有最值，则实数 a 的取值范围是

A. $(e,+\infty)$　　B. $\left(\dfrac{e}{2},+\infty\right)$　　C. $(-\infty,e]$　　D. $(-\infty,-e)$

9. 若函数 $f(x)=(x^2-ax-2)e^{x+1}$ 有两个极值点且这两个极值点互为相反数，则 $f(x)$ 的极小值为

A. $-6e^3$　　B. $-2e^3$　　C. $-4e$　　D. $-\dfrac{2}{e}$

10. 已知 $m,n\in\mathbf{R}$，则“$m+n>8$”是“$(m-4)^3+(n-4)^3+m+n>8$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\ln x|, & 0<x\leqslant 2,\\ |\ln(4-x)|, & 2<x<4,\end{cases}$ 若直线 $y=m$ 与 $f(x)$ 的图象有四个交点，且从左到右四个交点的横坐标依次为 x_1,x_2,x_3,x_4，则 $x_1x_2+x_3x_4+4(x_1+x_2)=$

A. 12　　B. 16　　C. 18　　D. 32

12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)$ 为偶函数，$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-2$，$3f(x)\cos x+f'(x)\sin x>0$，则不等式 $f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos^3 x-\dfrac{1}{4}>0$ 的解集为

A. $\left(-\dfrac{\pi}{3},+\infty\right)$　　B. $\left(-\dfrac{2\pi}{3},+\infty\right)$　　C. $\left(-\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$　　D. $\left(\dfrac{\pi}{3},+\infty\right)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 设集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid x=2\sin\theta,\theta\in\mathbf{R}\}$，则集合 A 的真子集个数为__________.

14. 请写出一个同时满足下列条件①②③的函数 $f(x)=$__________.

①$f(0)=0$；②对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$；③$f(x)<1$.

15. 已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，$g(3)=2$，若对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+6)=f(x)+f(3)$，对任意 $m,n\in\mathbf{R}$ 且 $m+n=4$，都有 $g(m)=g(n)$，则 $f(99)+g(99)=$__________.

16. 已知函数 $f(x)=|4^x-a|+2|2^x-a|$ 的最小值为 4，则实数 $a=$__________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (10 分)公众号拾穗者的杂货铺x思维方糖研究所

已知集合 $M=\{x\mid y=\sqrt{2+x-x^2}\}$，$N=\{x\mid |x-2a|\leqslant 1\}$.

(Ⅰ)若 $M\cap N=[1,2]$，求 $M\cup N$；

(Ⅱ)若 $x\in M$ 是 $x\in N$ 的必要不充分条件，求实数 a 的取值范围.

18. (12 分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{(x+a)\cdot 3^x+x-1}{3^x+1}(a\in\mathbf{R})$ 为奇函数.

(Ⅰ)证明：$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数；

(Ⅱ)解关于 x 的不等式 $f(x^2+4x)+f(12-11x)<0$.

19. (12 分)

已知函数 $f(x)=\log_2 x-\log_2(4-x)$，$g(x)=\log_2(x+a)$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的定义域，并证明 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称；

(Ⅱ)若关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有两个不同的实数解，求实数 a 的取值范围.

20. (12 分)

已知函数 $f(x)=(x-a)e^x(a\in\mathbf{R})$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $x-ey+1=0$ 垂直.

(Ⅰ)求实数 a 的值；

(Ⅱ)若不等式 $f(x)+3e^x\geqslant m\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)+2$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

21. (12 分)

已知函数 $f(x)=(1-a)\ln x+x+\dfrac{a}{x}-2(a\in\mathbf{R})$.

(Ⅰ)试讨论 $f(x)$ 的单调区间；

(Ⅱ)若 $a\leqslant 2$，讨论 $f(x)$ 在区间 $(0,e^2]$ 上的零点个数.

22. (12 分)

已知函数 $f(x)=e^x-3x-6$.

(Ⅰ)若函数 $g(x)=xf(x)$，求 $g(x)$ 的极值；

(Ⅱ)证明：不等式 $f(x)+2\sin x+5\geqslant 0$ 恒成立.

“天一大联考·皖豫名校联盟”2023 届高中毕业班第一次考试

数学·答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

1. 答案　C

命题意图　本题考查集合的运算.

解析　由题可知 $A=\{x|x\geqslant 2\}$，所以 $\complement_U A=\{x|0<x<2\}$.

2. 答案　C

命题意图　本题考查全称量词命题与存在量词命题的否定.

解析　由题可知，$\neg p$：$\exists m\in[0,1]$，使得 $m^2-2m>0$.

3. 答案　D

命题意图　本题考查导数的定义.

解析　$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-2-4\Delta x)-f(-2)}{\Delta x}=-4\lim\limits_{-4\Delta x\to 0}\dfrac{f(-2-4\Delta x)-f(-2)}{-4\Delta x}=-4f'(-2)=8$.

4. 答案　A

命题意图　本题考查函数图象的识别.

解析　因为 $f(-x)=\dfrac{x^2\ln|x|}{e^{-x}}\neq\pm f(x)$，所以 $f(x)$ 为非奇非偶函数，排除 C；当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)<0$，排除 B；当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，且当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to 0$，排除 D. 故选 A.

5. 答案　D

命题意图　本题考查函数极值与导数的关系.

解析　由题图可知，当 $0<x<1$ 时，$\log_3 x-1<0$，$f'(x)<0$；当 $1<x<3$ 时，$\log_3 x-1<0$，$f'(x)>0$；当 $3<x<6$ 时，$\log_3 x-1>0$，$f'(x)>0$；当 $6<x<10$ 时，$\log_3 x-1>0$，$f'(x)>0$；当 $x>10$ 时，$\log_3 x-1>0$，$f'(x)<0$. 故 $f(x)$ 有极小值 $f(1)$，极大值 $f(10)$，故选 D.

6. 答案　B

命题意图　本题考查指数函数模型的实际应用.

解析　由题意知，该市人口每年的增长率为 $\dfrac{30-20}{20}=\dfrac{1}{2}$. 设从 2021 年开始经过 x 年后的人口为 y 万人，则由题意可得 $y=20\times\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^x=20\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$. 令 $20\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^x>200$，即 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x>10$，两边取对数得 $x\lg\dfrac{3}{2}>1$，即 $x>\dfrac{1}{\lg\dfrac{3}{2}}=\dfrac{1}{\lg 3-\lg 2}\approx 5.56$，因此 $n=6$.

7. 答案　A

命题意图　本题考查利用导数研究函数的单调性.

解析　令 $f(x)=e^x-x(x>0)$，则 $f'(x)=e^x-1>0$，所以函数 $f(x)=e^x-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 因为 $a=$

$2-\ln 2=e^{\ln 2}-\ln 2$, $b=e^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}$,且 $1>\ln 2>\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}$,所以 $f(1)>f(\ln 2)>f\left(\frac{1}{2}\right)$,即 $c>a>b$,故选 A.

8. 答案　A

命题意图　本题考查函数最值与导数的关系.

解析　函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,且 $f'(x)=\frac{a}{x}-1=\frac{a-x}{x}$. 当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)<0$ 恒成立,函数 $f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减,不存在最值;当 $a>0$ 时,令 $f'(x)>0$,得 $0<x<a$,令 $f'(x)<0$,得 $x>a$,所以函数 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增,在 $(a,+\infty)$ 上单调递减. 当函数 $f(x)$ 在区间 $(e,+\infty)$ 内有最值时,$a>e$,所以实数 a 的取值范围为 $(e,+\infty)$.

9. 答案　B

命题意图　本题考查利用导数研究函数极值.

解析　$f'(x)=[x^2+(2-a)x-(a+2)]e^{x+1}$,$f(x)$ 的极值点即方程 $x^2+(2-a)x-(a+2)=0$ 的两个实根,两实根互为相反数,则 $a-2=0$,得 $a=2$,所以 $f(x)=(x^2-2x-2)e^{x+1}$,$f'(x)=(x^2-4)e^{x+1}$,分析单调性可知,$f(x)$ 的极小值为 $f(2)=-2e^3$.

10. 答案　C

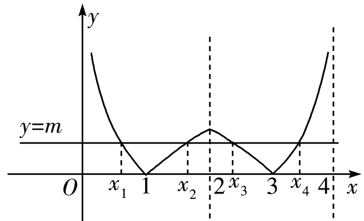
命题意图　本题考查充分条件与必要条件.

解析　易知函数 $f(x)=x^3+x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增,同时由 $f(-x)=-(x^3+x)=-f(x)$,知 $f(x)$ 为奇函数. 当 $m+n>8$ 时,$m-4>4-n$,则 $f(m-4)>f(4-n)=-f(n-4)$,即 $f(m-4)+f(n-4)>0$,所以 $(m-4)^3+(m-4)+(n-4)^3+(n-4)>0$,即 $(m-4)^3+(n-4)^3+m+n>8$,所以"$m+n>8$"是"$(m-4)^3+(n-4)^3+m+n>8$"的充分条件. 当 $(m-4)^3+(n-4)^3+m+n>8$ 时,$(m-4)^3+(m-4)+(n-4)^3+(n-4)>0$,即 $f(m-4)+f(n-4)>0$,所以 $f(m-4)>-f(n-4)=f(4-n)$,所以 $m-4>4-n$,即 $m+n>8$,所以"$m+n>8$"是"$(m-4)^3+(n-4)^3+m+n>8$"的必要条件.

11. 答案　C

命题意图　本题考查分段函数的图象.

解析　作出函数 $f(x)$ 的图象,如图所示,易知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称. 由图可知 $x_1+x_4=x_2+x_3=4$,且 $0<x_1<1<x_2<2<x_3<3<x_4<4$,所以 $1<4-x_3<2$, $0<4-x_4<1$. 由 $|\ln x_1|=|\ln x_2|$,可得 $-\ln x_1=\ln x_2$,所以 $x_1x_2=1$. 由 $|\ln x_3|=|\ln x_4|$,可得 $\ln(4-x_3)=-\ln(4-x_4)$,所以 $(4-x_3)(4-x_4)=1$,所以 $x_3x_4=4(x_3+x_4)-15$,于是 $x_1x_2+x_3x_4+4(x_1+x_2)=1+4(x_3+x_4)-15+4(x_1+x_2)=4(x_1+x_4)+4(x_2+x_3)-14=4\times 4+4\times 4-14=18$.



12. 答案　B

命题意图　本题考查利用函数的单调性及奇偶性解不等式.

解析 令 $g(x)=f(x)\sin^3x$，则 $g'(x)=3f(x)\sin^2x\cos x+f'(x)\sin^3x=\sin^2x[3f(x)\cos x+f'(x)\sin x]\geqslant 0$，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 又因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2$，所以 $g\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{8}f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$，$g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin^3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos^3x$，所以不等式 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos^3x-\frac{1}{4}>0$ 等价于 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos^3x>\frac{1}{4}$，所以 $g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)>g\left(-\frac{\pi}{6}\right)$，则 $x+\frac{\pi}{2}>-\frac{\pi}{6}$，解得 $x>-\frac{2\pi}{3}$，所以不等式 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos^3x-\frac{1}{4}>0$ 的解集为 $\left(-\frac{2\pi}{3},+\infty\right)$.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案** 31

命题意图 本题考查集合的真子集个数.

解析 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid x=2\sin\theta,\theta\in\mathbf{R}\}=\{-2,-1,0,1,2\}$，故集合 A 的真子集个数为 $2^5-1=31$.

14. **答案** $1-\left(\frac{1}{2}\right)^x$（答案不唯一）

命题意图 本题考查函数的图象与性质.

解析 根据题意可知 $f(x)$ 的图象过原点，且在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，又 $f(x)<1$，考虑图象有“渐近线”的指数函数，如 $f(x)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

15. **答案** 2

命题意图 本题考查函数的奇偶性与周期性.

解析 由 $f(x+6)=f(x)+f(3)$，知 $f(-3+6)=f(-3)+f(3)$，则 $f(-3)=0$，又因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(3)=f(-3)=0$，则 $f(x+6)=f(x)$，故 $f(x)$ 的一个周期为 6. 由 $m+n=4$，$g(m)=g(n)$，得 $g(m)=g(4-m)$，因为 $g(x)$ 为偶函数，所以 $g(4-m)=g(m-4)$，即 $g(m)=g(m-4)$，所以 $g(x)$ 的一个周期为 4，所以 $f(99)+g(99)=f(6\times16+3)+g(4\times24+3)=f(3)+g(3)=2$.

16. **答案** 4

命题意图 本题考查二次函数的图象与性质.

解析 令 $2^x=t(t>0)$，则函数 $f(x)$ 化为 $y=|t^2-a|+2|t-a|$. 若 $a\leqslant 0$，则 $y=t^2+2t-3a(t>0)$ 单调递增，没有最小值. 若 $a=1$，则当 $t=1$ 时，$y=0$，不符合题意. 若 $0<a<1$，则 $a<\sqrt{a}$，则 $y=\begin{cases}3a-t^2-2t,0<t\leqslant a,\\2t-t^2-a,a<t<\sqrt{a},\\t^2+2t-3a,t\geqslant\sqrt{a},\end{cases}$ 当 $t=a$ 时，y 取最小值 $a-a^2$，令 $a-a^2=4$，无解. 若 $a>1$，则 $a>\sqrt{a}$，则 $y=\begin{cases}3a-t^2-2t,0<t\leqslant\sqrt{a},\\t^2-2t+a,\sqrt{a}<t<a,\\t^2+2t-3a,t\geqslant a,\end{cases}$ 当 $t=\sqrt{a}$ 时，y 取最小值 $2a-2\sqrt{a}$，令 $2a-2\sqrt{a}=4$，解得 $a=4$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查集合的运算、充分条件与必要条件.

解析　由题可知 $M=\{x|2+x-x^2\geqslant 0\}=\{x|(x+1)(x-2)\leqslant 0\}=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$，…………………（1 分）

$N=\{x|-1\leqslant x-2a\leqslant 1\}=\{x|2a-1\leqslant x\leqslant 2a+1\}$. ……………………………………………………………（3 分）

（Ⅰ）因为 $M\cap N=[1,2]$，所以 $\begin{cases}2a-1=1,\\2a+1\geqslant 2,\end{cases}$ 解得 $a=1$. ……………………………………………………（4 分）

所以 $N=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$，所以 $M\cup N=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$. ……………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）因为 $x\in M$ 是 $x\in N$ 的必要不充分条件，所以 $N\subsetneqq M$. ……………………………………………………（8 分）

由 $\begin{cases}2a-1\geqslant -1,\\2a+1\leqslant 2,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant a\leqslant \frac{1}{2}$，

故实数 a 的取值范围为 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. ……………………………………………………………………………………（10 分）

18. **命题意图**　本题考查利用导数证明函数的单调性、利用函数的单调性解不等式.

解析　（Ⅰ）因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(0)=0$，即 $a-1=0,a=1$. ……………………………………………（2 分）

所以 $f(x)=\frac{(x+1)\cdot 3^x+x-1}{3^x+1}=x+1-\frac{2}{3^x+1}$. ……………………………………………………………（3 分）

所以 $f'(x)=1+\frac{2\cdot 3^x\ln 3}{(3^x+1)^2}$，……………………………………………………………………………………（5 分）

则 $f'(x)>0$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数. ……………………………………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数且为增函数，

所以由 $f(x^2+4x)+f(12-11x)<0$，得 $f(x^2+4x)<-f(12-11x)=f(11x-12)$，…………………（9 分）

则 $x^2+4x<11x-12$，即 $x^2-7x+12<0$，解得 $3<x<4$，

故不等式 $f(x^2+4x)+f(12-11x)<0$ 的解集为 $(3,4)$. ……………………………………………………（12 分）

19. **命题意图**　本题考查对数函数的定义域、根据方程解的个数求参数的范围.

解析　（Ⅰ）由 $\begin{cases}x>0,\\4-x>0\end{cases}$ 可得 $0<x<4$，即 $f(x)$ 的定义域为 $(0,4)$. ……………………………………（1 分）

令 $h(x)=f(x+2)=\log_2(x+2)-\log_2(2-x)$，

由 $\begin{cases}2+x>0,\\2-x>0\end{cases}$ 解得 $-2<x<2$，即 $h(x)$ 的定义域为 $(-2,2)$. ……………………………………………（3 分）

因为 $h(-x)=\log_2(2-x)-\log_2(2+x)=-h(x)$，

所以 $h(x)$ 为奇函数，所以 $f(x+2)$ 的图象关于原点 $(0,0)$ 对称，

故 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称. ……………………………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$，$x\in(0,4)$，

即 $\log_2 x-\log_2(4-x)=\log_2(a+x)$，$x\in(0,4)$，

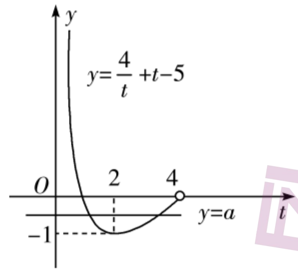
所以 $\frac{x}{4-x}=a+x$，即 $a=\frac{x}{4-x}-x=\frac{4-(4-x)}{4-x}-x=\frac{4}{4-x}+(4-x)-5$，

故关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有两个不同的实数解，转化为 $a=\frac{4}{4-x}+(4-x)-5$，$x\in(0,4)$ 有两个解，即 $y=a$

与 $y=\dfrac{4}{4-x}+(4-x)-5,x\in(0,4)$ 的图象有两个交点. ………………………………………………… (7 分)

设 $t=4-x,t\in(0,4)$,则 $y=\dfrac{4}{t}+t-5,t\in(0,4)$,

作出函数 $y=\dfrac{4}{t}+t-5,t\in(0,4)$ 的大致图象如图所示:



…… (9 分)

可知当 $-1<a<0$ 时,$y=a$ 与 $y=\dfrac{4}{t}+t-5,t\in(0,4)$ 的图象有两个交点,

即关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有两个不同的实数解,

故实数 a 的取值范围是 $(-1,0)$. ………………………………………………………………………… (12 分)

20. **命题意图** 本题考查导数的几何意义、根据不等式恒成立求参数的范围.

解析 (Ⅰ)由 $f(x)=(x-a)e^x$,得 $f'(x)=e^x+(x-a)e^x=(x-a+1)e^x$,……………………………… (2 分)

所以 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为 $f'(1)=(2-a)e$. ……………………………… (3 分)

因为切线与直线 $x-ey+1=0$ 垂直,所以 $(2-a)e=-e$,解得 $a=3$. ……………………………… (5 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $f(x)=(x-3)e^x$,则 $f(x)+3e^x\geqslant m\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)+2$ 等价于 $xe^x\geqslant m\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)+2$,

所以由题意知 $m\leqslant\dfrac{xe^{2x}-2e^x}{e^x+1}$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立. ………………………………………… (6 分)

令 $g(x)=\dfrac{xe^{2x}-2e^x}{e^x+1}$,则 $g'(x)=\dfrac{(2xe^{2x}+e^{2x}-2e^x)(e^x+1)-(xe^{2x}-2e^x)e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^x(e^x+2)(xe^x+e^x-1)}{(e^x+1)^2}$.

…… (7 分)

令 $h(x)=xe^x+e^x-1$,易知

当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$xe^x<0,e^x-1<0$,所以 $h(x)<0,g'(x)<0,g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,

当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$xe^x>0,e^x-1>0$,所以 $h(x)>0,g'(x)>0,g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,……… (10 分)

所以 $g(x)_{\min}=g(0)=-1$,所以 $m\leqslant-1$,

即实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-1]$. …………………………………………………………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数的单调性、探究零点的个数.

解析 (Ⅰ)由题可知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,$f'(x)=\dfrac{1-a}{x}+1-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{(x+1)(x-a)}{x^2}$. ………… (2 分)

当 $a\leqslant0$ 时,$f'(x)>0$ 恒成立,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增; ……………………………… (3 分)

当 $a>0$ 时,由 $f'(x)>0$,得 $x>a$,由 $f'(x)<0$,得 $0<x<a$,

所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减,在 $(a,+\infty)$ 上单调递增. ………………………………………… (4 分)

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，无单调递减区间；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,a)$，单调递增区间为 $(a,+\infty)$. ………………………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$ 在 $(0,e^2]$ 上恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,e^2]$ 上单调递增. …………（6 分）

因为 $f(1)=a-1<0$，$f(e^2)=e^2+a\left(\frac{1}{e^2}-2\right)>0$，

所以由函数零点存在定理知，函数 $f(x)$ 在 $(0,e^2]$ 上有 1 个零点. ………………………………（7 分）

当 $0<a\leqslant 2$ 时，若 $x\in(0,a)$，则 $f'(x)<0$，若 $x\in(a,e^2]$，则 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,a)$ 上单调递减，在区间 $(a,e^2]$ 上单调递增，

可得 $f(x)_{\min}=f(a)=(1-a)\ln a+a-1=(a-1)(1-\ln a)$. ………………………………（8 分）

①当 $a=1$ 时，$f(x)_{\min}=0$，此时 $f(x)$ 在区间 $(0,e^2]$ 上有 1 个零点. ………………………………（9 分）

②当 $0<a<1$ 时，$f(x)_{\min}<0$.

因为当 $x\to 0$ 时 $f(x)\to+\infty$，$f(e^2)=e^2+a\left(\frac{1}{e^2}-2\right)>0$，

所以此时 $f(x)$ 在区间 $(0,e^2]$ 上有 2 个零点. ………………………………（10 分）

③当 $1<a\leqslant 2$ 时，$f(x)_{\min}>0$，此时 $f(x)$ 在区间 $(0,e^2]$ 上无零点. ………………………………（11 分）

综上可知，当 $a\leqslant 0$ 或 $a=1$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,e^2]$ 上有 1 个零点；当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,e^2]$ 上有 2 个零点；当 $1<a\leqslant 2$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,e^2]$ 上无零点. ………………………………（12 分）

22. **命题意图**　本题考查导数在求函数极值及不等式证明问题中的应用.

解析　（Ⅰ）由题可知 $g(x)=xf(x)=xe^x-3x^2-6x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

所以 $g'(x)=(x+1)e^x-6x-6=(x+1)(e^x-6)$. ………………………………（1 分）

令 $g'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=\ln 6$.

令 $g'(x)<0$，可得 $-1<x<\ln 6$，令 $g'(x)>0$，可得 $x<-1$ 或 $x>\ln 6$. ………………………………（3 分）

所以当 $x=-1$ 时，$g(x)$ 取得极大值 $g(-1)=3-\frac{1}{e}$，

当 $x=\ln 6$ 时，$g(x)$ 取得极小值 $g(\ln 6)=-3(\ln 6)^2$. ………………………………（5 分）

（Ⅱ）要证 $f(x)+2\sin x+5\geqslant 0$ 恒成立，即证 $e^x+2\sin x-3x-1\geqslant 0$ 恒成立.

令 $s(x)=e^x+2\sin x-3x-1$，则 $s'(x)=e^x+2\cos x-3$. ………………………………（6 分）

当 $x<0$ 时，因为 $e^x<1$，$\cos x\leqslant 1$，所以 $s'(x)<0$，

所以 $s(x)$ 单调递减，故 $s(x)>s(0)=0$. ………………………………（7 分）

当 $x\geqslant 0$ 时，令 $h(x)=e^x+2\cos x-3$，则 $h'(x)=e^x-2\sin x$，

令 $m(x)=x-\sin x$，$x\geqslant 0$，则 $m'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，

即 $m(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，故 $m(x)\geqslant m(0)=0$，

即当 $x\geqslant 0$ 时，$x\geqslant\sin x$，故 $h'(x)=e^x-2\sin x\geqslant e^x-2x$. ………………………………（8 分）

下证 $e^x>2x$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上恒成立.

设 $\varphi(x)=e^x-2x$，$x\geqslant 0$，则 $\varphi'(x)=e^x-2$.

令 $\varphi'(x)=0$，得 $x=\ln 2$，

当 $x\in[0,\ln 2)$ 时，$\varphi'(x)<0$，当 $x\in(\ln 2,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$，

故 $\varphi(x)$ 在 $[0,\ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $\varphi(x)\geqslant\varphi(\ln 2)=2-2\ln 2>0$，故 $e^x>2x$. …………………………………………………… (10 分)

所以 $h'(x)>0$ 当 $x\geqslant 0$ 时恒成立，即当 $x\geqslant 0$ 时 $h(x)$ 单调递增，

故 $h(x)=e^x+2\cos x-3\geqslant h(0)=0$，即 $s'(x)=e^x+2\cos x-3\geqslant 0$，

所以 $s(x)=e^x+2\sin x-3x-1$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增. …………………………………………… (11 分)

故 $s(x)\geqslant s(0)=0$，

所以原不等式得证. …………………………………………………………………………………………… (12 分)