2023 届高三开学摸底联考　新高考卷

数学参考答案及评分意见

1.A 【解析】$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|x<0$ 或 $x>3\}$，所以 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{4,5\}$.

2.C 【解析】由特称命题的否定为全称命题得，该命题的否定为“$\forall x>0,-x^2+2x-1\leqslant 0$”.

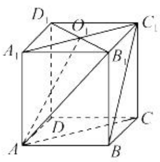
3.A 【解析】$\dfrac{C_5^2\times C_3^2}{A_2^2}\times A_3^3=90$.

4.D 【解析】$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}=\sqrt{(x-1)^2+x^2}$，解得 $x=-1$(舍)或 $x=2$，所以 $\boldsymbol{b}=(1,2)$，$m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2m-1,m-2)$，$(m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=4m-5=0$，解得 $m=\dfrac{5}{4}$.

5.A 【解析】$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}=\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{\tan^2\frac{\alpha}{2}+1}$，解得 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\pm\dfrac{1}{3}$，

因为 $2k\pi<\alpha<2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $k\pi<\dfrac{\alpha}{2}<k\pi+\dfrac{\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$，故 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{3}$.

6.C 【解析】连接 B_1D_1，与 A_1C_1 交于点 O_1，连接 AO_1，易得$\angle B_1AO_1$ 即为直线 AB_1 与平面 ACC_1A_1 所成的角，所以$\angle B_1AO_1=30°$.由题，$B_1O_1=\sqrt{2}$，$AB_1=2\sqrt{2}$，设 $AA_1=a$，则 $AB_1=\sqrt{AB^2+BB_1^2}=\sqrt{4+a^2}=2\sqrt{2}$，得 $a=2$，又 $AC/\!/A_1C_1$，所以$\angle A_1C_1B$ 即为直线 BC_1 与直线 AC 所成的角，易得$\angle A_1C_1B=60°$.



7.C 【解析】直线 l 恒过点 $D(1,2)$，点 D 在圆内，当 $CD\perp l$ 时，$|AB|$ 最小，$\triangle ABC$ 周长最小，由 $C(2,1)$，$D(1,2)$ 易得 $k_{CD}=-1$，所以 $k=1$.

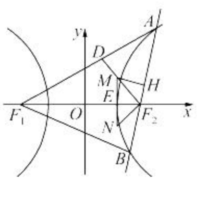
8.B 【解析】由 $a\cdot e^{ax-1}\geqslant\dfrac{\ln x}{e}$ 得 $ae^{ax}\geqslant\ln x$，即 $ax\cdot e^{ax}\geqslant x\ln x=e^{\ln x}\cdot\ln x$.设 $f(x)=xe^x(x>0)$，则原不等式等价于 $f(ax)\geqslant f(\ln x)$，因为 $f'(x)=e^x+x\cdot e^x>0$，故 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，故 $ax\geqslant\ln x$ 对任意的 $x>0$ 恒成立，即 $a\geqslant\dfrac{\ln x}{x}$ 对任意的 $x>0$ 恒成立，设 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，易得 $g(x)$在$(0,e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减，所以 $g(x)_{\max}=g(e)=\dfrac{1}{e}$，所以 a 的最小值为$\dfrac{1}{e}$.

9.ABD 【解析】将 $x=20$ 代入 $\hat{y}=2.52e^{0.17x}$ 得 $\hat{y}=75.6$，A 正确；将 $\bar{x}=7$，$\bar{y}=10$ 代入 $\hat{y}=1.69x+\hat{a}$ 得 $\hat{a}=-1.83$，B 正确；由散点图可知，回归方程 $\hat{y}=2.52e^{0.17x}$ 比 $\hat{y}=1.69x+\hat{a}$ 的拟合效果更好，C 错误；因为 y 随 x 的增大而增大，所以 y 与 x 正相关，D 正确.故选 ABD.

10.BD 【解析】令 $x=-1$，得 $f(1)+f(-1)=f(1)$，即 $f(-1)=0$，又 $f(x)$在$[-2,0]$单调递增，因为 $f(x)$为偶函数，$f(x)$在$[0,2]$上单调递减，A 错误；$f(1)=0$，又 $f(x+2)+f(x)=f(1)=0$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)$是以 4 为周期的函数，B 正确；易知 $f(x)$的图象的对称轴为直线 $x=2k$，$k\in\mathbf{Z}$，C 错误；$f(x)$在一个周期内有两个零点，故 $f(x)$在区间$[-100,100]$上的零点个数为 $50\times2=100$，D 正确.

11.BD 【解析】$f(x)=2\times\dfrac{1+\cos x}{2}-\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x+1=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+1$，$g(x)=\sin\left(2x+2\varphi+\dfrac{\pi}{6}\right)+1$，所以 $g(x)$的最大值为 2，A 错误；因为 $g(x)\leqslant g\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$成立，所以 $g(x)$在 $x=\dfrac{\pi}{12}$处取得最大值，故 $2\varphi+\dfrac{\pi}{3}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$，因为 $\varphi>0$，所以当 $k=0$ 时，φ 取得最小值$\dfrac{\pi}{12}$，B 正确；$g(x)=\sin\left(2x+2k\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)+1=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+1$，令 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<2x+\dfrac{\pi}{3}<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $k\pi-\dfrac{5\pi}{12}<x<k\pi+\dfrac{\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $g(x)$在$\left(-\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{\pi}{12}\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right)$上单调递减，所以 $g(x)$在$\left(-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right)$不单调，C 错误；$g\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\sin\left(2\times\dfrac{7\pi}{12}+\dfrac{\pi}{3}\right)+1=0$，所以 $g(x)$在 $x=\dfrac{7\pi}{12}$处取得最小值，D 正确.

12.ACD 【解析】因为双曲线的两条渐近线的倾斜角分别为$\dfrac{\pi}{3}$和$\dfrac{2\pi}{3}$，作图可知，若直线 l 过点 F_2 且与双曲线 C 的右支有两个交点，则直线 l 倾斜角的取值范围为$\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$，A 正确；设焦距为 $2c$，由题可知$\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$，故 $c=2a$，如图，过点 M 分别作 F_1A，F_1F_2，AF_2 的垂线，垂足分别为 D,E,H，易得$|F_1D|=|F_1E|$，$|F_2E|=|F_2H|$，$|AD|=|AH|$，因为$|AF_1|-|AF_2|=2a$，所以$|F_1E|-|F_2E|=2a$，又$|F_1E|+|F_2E|=2c$，得



$|F_2E|=c-a=a$,所以 $E(a,0)$,M 点横坐标为 a,同理可得 N 点横坐标也为 a,当直线 l 不垂直于 x 轴时,$\angle MF_2E\neq\angle NF_2E$,B 错误;设直线 l 的倾斜角为 α,则 $2\angle MF_2E+2\angle NF_2E=\pi$,所以 $\angle MF_2N=\frac{\pi}{2}$,C 正确;易得 $\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{2}{3}\pi$,则 $\angle MF_2E=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$,$\angle NF_2E=\frac{\alpha}{2}$,所以 $|ME|=\frac{a}{\tan\frac{\alpha}{2}}$,$|NE|=a\tan\frac{\alpha}{2}$,$|MN|=a\tan\frac{\alpha}{2}+\frac{a}{\tan\frac{\alpha}{2}}$,因为 $\frac{\sqrt{3}}{3}<\tan\frac{\alpha}{2}<\sqrt{3}$,由对勾函数可得 $2a\leqslant|MN|<\frac{4\sqrt{3}}{3}a$,所以三角形 MNF_2 的面积 $S\geqslant\frac{1}{2}\times2a\times a=a^2$,D 正确.

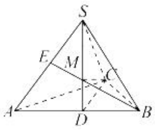
13.2 【解析】$z=\frac{(1-ai)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{2-a}{5}+\frac{-2a-1}{5}i$ 为纯虚数,所以 $\frac{2-a}{5}=0,a=2$.

14.$\log_2 x$ 【解析】符合条件即可.

15.21 【解析】由题可得 $\begin{cases}a_{11}>0,\\a_{12}<0,\\a_{11}+a_{12}<0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a_1+a_{21}=2a_{11}>0,\\a_1+a_{23}=2a_{12}<0,\\a_1+a_{22}=a_{11}+a_{12}<0,\end{cases}$ 故 $\begin{cases}S_{21}>0,\\S_{23}<0,\\S_{22}<0,\end{cases}$

所以满足 $S_n>0$ 的正整数 n 的最大值为 21.

16.$9\sqrt{2}\pi$ 【解析】如图,连接 SM 并延长,交 AB 于点 D,BM 与 SA 交于点 E,



则 $SD\perp AB$,$BE\perp SA$.因为 $CM\perp$ 平面 SAB,所以 $CM\perp AB$,所以 $AB\perp$ 平面 SCD,所以 $CD\perp AB$,故 D 为 AB 中点,所以 $\triangle SAB$ 是等边三角形,$SA=SB=AB=2\sqrt{3}$,易得 $SM=BM=2$,$CM=2\sqrt{2}$,所以 $SC=2\sqrt{3}$,所以三棱锥 $S-ABC$ 的外接球即为棱长为 $\sqrt{6}$ 的正方体的外接球(或棱长为 $2\sqrt{3}$ 的正四面体的外接球),所以外接球半径 $R=\frac{1}{2}\times\sqrt{6+6+6}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,故外接球体积 $V=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^3=9\sqrt{2}\pi$.

17.【解】(1)选①,由 $a_{n+1}=2a_n+1$ 得 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$,

所以数列$\{a_n+1\}$是以 $a_1+1=2$ 为首项,2 为公比的等比数列,…………………… 2 分

$a_n+1=2\times2^{n-1}=2^n$,

所以 $a_n=2^n-1$. …………………… 4 分

选②,由 $S_n=2^{n+1}-n-2$ 得 $S_{n-1}=2^n-n-1(n\geqslant2)$,…………………… 2 分

作差得 $a_n=2^n-1(n\geqslant2)$,

$a_1=1$ 符合上式,所以 $a_n=2^n-1$. …………………… 4 分

选③,由 $S_n=2a_n-n$ 得 $S_{n-1}=2a_{n-1}-n+1(n\geqslant2)$,

作差得 $a_n=2a_n-2a_{n-1}-1$,即 $a_n=2a_{n-1}+1$,…………………… 2 分

即 $a_{n+1}=2a_n+1$,即 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$,

所以数列$\{a_n+1\}$是以 $a_1+1=2$ 为首项,2 为公比的等比数列,

$a_n+1=2\times2^{n-1}=2^n$,

所以 $a_n=2^n-1$. …………………… 4 分

(2)$b_n=na_n=n\times2^n-n$,

所以 $T_n=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n-(1+2+3+\cdots+n)$, …………………… 5 分

设 $E_n=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$,$F_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. …………………… 7 分

$E_n=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$,

$2E_n=1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+n\times2^{n+1}$,

作差得 $-E_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\times2^{n+1}=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\times2^{n+1}$,

化简得 $E_n=(n-1)\times2^{n+1}+2$, …………………… 9 分

所以 $T_n=E_n-F_n=(n-1)\times2^{n+1}-\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}+2$. …………………… 10 分

18.【解】(1)因为 $\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，所以 $(\sin B-\sin A)\times b-(a+c)(\sin C-\sin A)$，

由正弦定理得 $(b-a)\times b=(a+c)(c-a)$. ………………………………………… 2 分

即 $a^2+b^2-c^2=ab$，由余弦定理得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{ab}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，………………………… 4 分

因为 $0<C<\pi$，

所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………… 5 分

(2) $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}a\times4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}a=6\sqrt{3}$，解得 $a=6$，………………………… 7 分

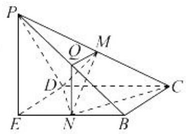
所以 $CD=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}\times a=3$. ……………………………………………… 8 分

在 $\triangle CAD$ 中，$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cdot\cos C$，

即 $AD^2=16+9-2\times4\times3\times\dfrac{1}{2}=13$，…………………………………………… 10 分

所以 $AD=\sqrt{13}$. ………………………………………………………………… 12 分

19.【解】(1)如图，取 PB 中点 Q，连接 MQ，NQ，因为 M，Q 分别为 PC 和 PB 的中点，故 $MQ/\!/BC/\!/DE$，



又 $DE\subset$ 平面 PED，$MQ\not\subset$ 平面 PED，

所以 $MQ/\!/$平面 PED，…………………………………………… 2 分

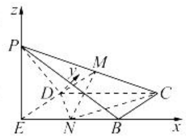
同理 $NQ/\!/$平面 PED.

又 $MQ\cap NQ=Q$，$MQ\subset$ 平面 MNQ，$NQ\subset$ 平面 MNQ，

所以平面 $MNQ/\!/$平面 PED. ………………………………………………… 4 分

因为 $MN\subset$ 平面 MNQ，所以 $MN/\!/$平面 PED. …………………………………… 5 分

(2)由题意，$PE\perp EB$，$PE\perp ED$，$DE\perp EB$，以 E 为坐标原点，EB，ED，EP 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系，



则 $D(0,2,0)$，$M\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$，$N(1,0,0)$，$C(2,2,0)$，则 $\overrightarrow{DM}=\left(1,-1,\dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{DN}=(1,-2,0)$，………… 7 分

设平面 DMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DM}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DN}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x-y+\dfrac{1}{2}z=0,\\ x-2y=0,\end{cases}$ 令 $x=2$，得 $y=1$，$z=-2$，

所以 $\boldsymbol{m}=(2,1,-2)$. ……………………………………………………… 9 分

同理可得平面 CMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-1,2)$，…………………………………… 10 分

$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4-1-4}{3\times3}=-\dfrac{1}{9}$，

所以二面角 $D-MN-C$ 的正弦值为 $\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{9}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$. ………………………………… 12 分

20.【解】(1)甲以 4：1 赢得比赛，则前 4 局中甲赢得了 3 局，第 5 局甲获胜，……………………… 2 分

所以甲以 4：1 赢得比赛概率为 $P=C_4^3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{64}{243}$. ……………………………… 5 分

(2)因为 $\xi\leqslant5$，$\xi\in\mathbf{N}$，所以在该局比赛中，甲只可能以 12：10 或 13：11 获胜，

故 ξ 的可能取值为 2，4，……………………………………………………… 6 分

设甲赢得该局比赛的概率为 $P(\xi)$，

$P(\xi=2)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}$，

$P(\xi=4)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{16}$，……………………………… 10 分

所以两人打了 $\xi(\xi\leqslant5,\xi\in\mathbf{N})$ 个球后甲赢得了该局比赛的概率为

$P=P(\xi=2)+P(\xi=4)=\dfrac{3}{8}+\dfrac{3}{16}=\dfrac{9}{16}$. …………………………………………… 12 分

21.【解】(1)设椭圆 C 的焦距为 $2c$，则 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，即 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=\dfrac{1}{6}$，

所以 $1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{6}$，即 $a^2=\frac{6}{5}b^2$……①，………… 2 分

又椭圆 C 经过点 $P(\sqrt{6},\sqrt{15})$，则 $\frac{6}{a^2}+\frac{15}{b^2}=1$……②，………… 4 分

由①②解得 $a^2=24,b^2=20$，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{20}=1$. ………… 5 分

(2)当直线 l 垂直于坐标轴时，点 M,N,Q 不能构成三角形，不符合题意，

当直线 l 不垂直于坐标轴时，设 $l:x=my+3$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $N(x_1,-y_1)$，

联立 $\begin{cases}x=my+3,\\ \frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{20}=1,\end{cases}$ 得 $(5m^2+6)y^2+30my-75=0$，………… 7 分

则 $y_1+y_2=-\frac{30m}{5m^2+6}$，$y_1y_2=-\frac{75}{5m^2+6}$.

又 $S_{\triangle PQN}=\frac{1}{2}\times|2y_1|\times|x_2-x_1|$，$S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}\times|2y_1|\times|3-x_1|$，

易知 x_2-x_1 与 $3-x_1$ 同号，

所以 $S_{\triangle MNQ}=S_{\triangle PQN}-S_{\triangle PMN}=|y_1|\times(|x_2-x_1|-|3-x_1|)=|y_1|\times|(x_2-x_1)-(3-x_1)|$

$=|y_1|\times|x_2-3|=|y_1|\times|my_2|=|my_1y_2|$ ………… 9 分

$=\frac{75|m|}{5m^2+6}=\frac{75}{5|m|+\frac{6}{|m|}}\leqslant\frac{75}{2\sqrt{5|m|\times\frac{6}{|m|}}}=\frac{5\sqrt{30}}{4}$，

当且仅当 $5|m|=\frac{6}{|m|}$，即 $m=\pm\frac{\sqrt{30}}{5}$ 时等号成立，………… 11 分

所以△MNQ 面积的最大值为 $\frac{5\sqrt{30}}{4}$. ………… 12 分

22.【解】(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-x-1$，则 $f'(x)=e^x-1$，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，………… 2 分

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

综上，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，单调递减区间为 $(-\infty,0)$. ………… 4 分

(2)证明：由 $f(x)>1-(\sin x+\cos x)$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立得

$e^x+\sin x+\cos x-ax-2>0$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

当 $a=1$ 时，由(1)知，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，

即当 $x>0$ 时，$e^x>x+1$，………… 5 分

设 $p(x)=x-\sin x(x>0)$，则 $p'(x)=1-\cos x\geqslant0$，所以 $p(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

故当 $x>0$ 时，$p(x)>p(0)=0$，即当 $x>0$ 时，$x>\sin x$，………… 6 分

所以当 $x>0$ 时，$e^x>x+1>\sin x+1\geqslant\sin x+\cos x$，

即 $e^x-\sin x-\cos x>0$……①，………… 8 分

设 $g(x)=e^x+\sin x+\cos x-ax-2$，则 $g'(x)=e^x+\cos x-\sin x-a$，

设 $t(x)=e^x+\cos x-\sin x-a$，则 $t'(x)=e^x-\sin x-\cos x$，

由①式知当 $x>0$ 时，$t'(x)>0$，所以 $t(x)$ 即 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g'(x)>g'(0)=2-a$，

当 $a\leqslant2$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，………… 10 分

故 $g(x)>g(0)=0$，即 $e^x+\sin x+\cos x-ax-2>0$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，

即 $f(x)>1-(\sin x+\cos x)$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立. ………… 12 分