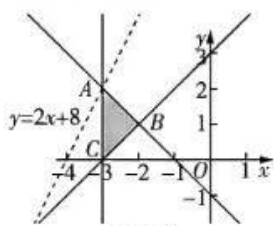


参考答案

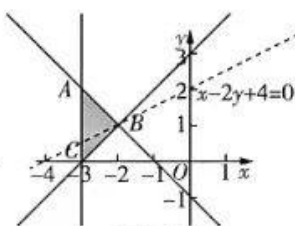
普高联考 2022—2023 学年高三测评(四)

文科数学

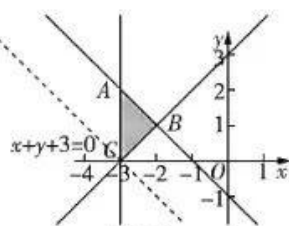
1. B 【解析】由题知 $A \cap B = \{2, 3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$, 依据选项可知 B 正确, 故选 B.
2. D 【解析】由题知 $a + bi - (2 + i)(a - bi) = -(a + b) + (3b - a)i = -3 + 5i$,
 则 $\begin{cases} -(a + b) = -3, \\ 3b - a = 5, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 1, \\ b = 2, \end{cases}$ 则 $a + b = 3$, 故选 D.
3. A 【解析】由题知 $a \cdot b = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta = \sin(\theta + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 又 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, 解得 $\theta = \frac{\pi}{6}$, 故选 A.
4. C 【解析】方法一 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $a_2 + a_5 + a_8 = 3a_1 + 12d = 15$, 即 $a_1 + 4d = 5$, 所以 $S_9 = 9a_1 + \frac{9 \times 8}{2}d = 9a_1 + 36d = 9(a_1 + 4d) = 45$, 故选 C.
 方法二 因为 $a_1 + a_9 = 2a_5$, 所以 $a_2 + a_5 + a_8 = 3a_5 = 15$, 则 $a_5 = 5$, 所以 $S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = 9a_5 = 45$, 故选 C.
5. C 【解析】设 $AB = m$, 则 $BC = \frac{m}{\tan 60^\circ} = \frac{m}{\sqrt{3}}$, 在 $\triangle BCD$ 中, $\angle CBD = 105^\circ$. 由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin 105^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ}$, 因为 $\sin 105^\circ = \sin(45^\circ + 60^\circ) = \sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$, 代入数据, 解得 $m = 90 - 30\sqrt{3} \approx 90 - 30 \times 1.7 = 39$ (米), 故选 C.
6. A 【解析】函数 $y = f(x) = \frac{x - 3\sin x}{e^{|x|}}$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(-x) = \frac{-x - 3\sin(-x)}{e^{|-x|}} = \frac{-x + 3\sin x}{e^{|x|}} = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数, 图象关于原点对称, 排除 BD 选项, 只需研究 $x > 0$ 的图象, 当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $\frac{\pi}{6} - 3\sin \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} - \frac{3}{2} < 0$, 则 $f(\frac{\pi}{6}) < 0$, 排除 C 选项, 故选 A.
7. C 【解析】不等式组的解集 D 表示的可行域如图中阴影部分所示, 依据图(1)知命题 p_1 为真命题, 依据图(2)知命题 p_2 为真命题, 依据图(3)知命题 p_3 为假命题, 依据图(4)知命题 p_4 为真命题. 所以真命题有 3 个, 故选 C.



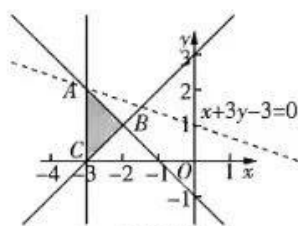
图(1)



图(2)



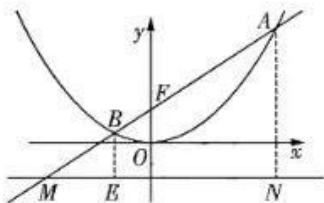
图(3)



图(4)

8. A 【解析】因为 $y = xf(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 所以 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数. 关于实数 t 的不等式 $f(\log_3 t) + f(\log_{\frac{1}{3}} t) > 2f(2)$ 可变形为 $f(\log_3 t) + f(-\log_3 t) > 2f(2)$, 即 $f(\log_3 t) > f(2)$, 因为 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $|\log_3 t| > 2$, 则 $\log_3 t > 2$ 或 $\log_3 t < -2$, 解得 $t > 9$ 或 $0 < t < \frac{1}{9}$, 所以 t 的取值范围是 $(0, \frac{1}{9}) \cup (9, +\infty)$, 故选 A.

9. A 【解析】如图, 过点 A, B 分别作准线的垂线, 垂足分别为 N, E , 根据抛物线的定义得 $|AF| = |AN|$, $|BF| = |BE|$, 因为 F 为 AM 的中点, 所以 $\frac{|AF|}{|BM|} = \frac{|BF| + |BM|}{|BM|} = \frac{|BF|}{|BM|} + 1$, 又 $\frac{|BF|}{|BM|} = \frac{|BE|}{|BM|} = \frac{|AN|}{|AM|} = \frac{|AF|}{|AM|} = \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{|AF|}{|BM|} = \frac{|BF|}{|BM|} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, 所以 $\lambda = \frac{3}{2}$, 故选 A.



10. B 【解析】由题意, $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow a_5 \rightarrow a_6 \rightarrow a_7$ 的可能情况有:

- ① $1 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$; ② $1 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$;
③ $2 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 1 \rightarrow 2$; ④ $3 \rightarrow 1 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2$;
⑤ $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \rightarrow 2$; ⑥ $2 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2$.

$\therefore m$ 的所有可能取值为 2, 6, 20, 3, 128, 21, 所有可能取值的和为 190. 故选 B.

11. B 【解析】令 $\omega x + \frac{\pi}{6} = k_1 \pi, k_1 \in \mathbf{Z}$, 得 $x = \frac{k_1 \pi - \frac{\pi}{6}}{\omega}, k_1 \in \mathbf{Z}$. 又 $\omega > 0$, 且 $\frac{\pi}{6}$ 为 $f(x)$ 的第 2 个、第 3 个正

零点分别为 $\frac{11\pi}{6\omega}, \frac{17\pi}{6\omega}$, 则 $\begin{cases} \frac{11\pi}{6\omega} \leq \frac{2\pi}{3}, \\ \frac{17\pi}{6\omega} > \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$ 解得 $\frac{11}{4} \leq \omega < \frac{17}{4}$. 令 $-\frac{\pi}{2} + 2k_2 \pi \leq \omega x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} + 2k_2 \pi, k_2 \in \mathbf{Z}$, 得

$-\frac{2\pi}{3\omega} + \frac{2k_2 \pi}{\omega} \leq x \leq \frac{\pi}{3\omega} + \frac{2k_2 \pi}{\omega}, k_2 \in \mathbf{Z}$, 令 $k_2 = 0$, 得 $f(x)$ 在 $[-\frac{2\pi}{3\omega}, \frac{\pi}{3\omega}]$ 上单调递增, 所以 $[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}] \subseteq$

$[-\frac{2\pi}{3\omega}, \frac{\pi}{3\omega}]$, 所以 $\begin{cases} -\frac{2\pi}{3\omega} \leq -\frac{\pi}{12}, \\ \frac{\pi}{3\omega} \geq \frac{\pi}{12}, \end{cases}$ 解得 $0 < \omega \leq 4$. 综上所述, ω 的取值范围是 $\frac{11}{4} \leq \omega \leq 4$. 故选 B.

12. D 【解析】设双曲线的下焦点为 F_2 , 则 $|PF_1| + |PF_2| = |PA| + |PF_2| + 2a \geq |AF_2| + 2a$, 又 $A(4, 0), F_2(0, -c), c^2 = a^2 + 8$, 则 $|AF_2| + 2a = \sqrt{16 + c^2} + 2a = \sqrt{24 + a^2} + 2a = 7$, 解得 $a = 1$ 或 $a = \frac{25}{3}$ (舍去), 此时 $c = 3$, 则离心率为 $e = \frac{c}{a} = 3$, 故选 D.

13. 24 【解析】方法一 $a_5^2 = a_4 a_6 = 48 \times 12$, 又 $a_5 > 0$, 所以 $a_5 = 12 \times 2 = 24$.

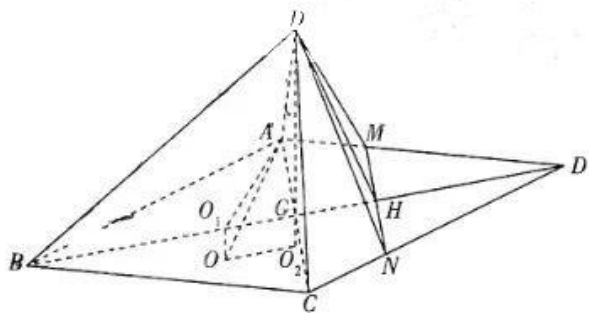
方法二 设等比数列的公比为 $q (q > 0)$, 则 $q^2 = \frac{a_6}{a_4} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$, 解得 $q = \frac{1}{2}$, 则 $a_5 = a_4 q = 24$.

14. 0.3 【解析】将 2 名男教师分别记为 x, y , 3 名女教师分别记为 a, b, c . 设“选中的 2 人都是女教师”为事件 A , 则从 5 名教师中任选 2 人参加志愿者服务的所有可能情况有 $(x, y), (x, a), (x, b),$

$(x, c), (y, a), (y, b), (y, c), (a, b), (a, c), (b, c)$, 共 10 种, 其中事件 A 包含的可能情况有 $(a, b), (a, c), (b, c)$, 共 3 种, 故 $P(A) = \frac{3}{10} = 0.3$.

15. $\frac{\pi}{6}$ 【解析】设 $M(x, y)$, 由题知 $|MA| = 2|MB|$, 则 $\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$, 整理得 $(x-4)^2 + y^2 = 16$, 则点 M 的轨迹是圆心为 $(4, 0)$, 半径 $R=4$ 的圆, 记为圆 C , 直线 l 经过点 A 且与圆 C 相切, 设切点为 N , 连接 CN , 则 $CN=4, AC=8$, 则 $\sin \angle CAN = \frac{1}{2}$, 所以 $\angle CAN = \frac{\pi}{6}$, 又 $k > 0$, 所以直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$.

16. $\frac{627}{16}\pi$ 【解析】如图, 因为 $AM = \frac{1}{3}MD, CN = \frac{1}{3}ND$, 所以 $MN \parallel AC$, 设 MN 与 BD 的交点为 H , 连接 $D'H$. 因为 $AD = CD = AB = 5, GA = GC = 3$, 所以 $DG = 4$, 则 $GH = 1, DH = 3$, 所以 $D'H = 3$. 又 $GD' = 2\sqrt{2}$, 则 $D'G^2 + GH^2 = D'H^2$, 则 $D'G \perp GH$. 又 $D'G \perp AC, AC \cap HG = G$, 故 $D'G \perp$ 平面 ABC . 设 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 $O_1, \triangle AD'C$ 的外接圆圆心为 O_2 , 过 O_1, O_2 分别作平面 ABC , 平面 $AD'C$ 的垂线, 设两垂线交于点 O , 则 O 是三棱锥 $D'-ABC$ 外接球的球心, 且四边形 O_1OO_2G 为矩形. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 r_1 , 在 $\triangle ABC$ 中, 由 $(4-r_1)^2 + 3^2 = r_1^2$, 解得 $r_1 = \frac{25}{8}$, 同理可得 $\triangle AD'C$ 的外接圆半径 $r_2 = \frac{17\sqrt{2}}{8}$, 所以 $GO_2 = \frac{\sqrt{2}}{8}$. 设三棱锥 $D'-ABC$ 的外接球半径为 R , 则 $R^2 = O_1A^2 + GO_2^2 = \frac{625}{64} + \frac{2}{64} = \frac{627}{64}$, 则三棱锥 $D'-ABC$ 的外接球的表面积 $S = 4\pi R^2 = \frac{627}{16}\pi$.



17. (1) 由正弦定理得 $\sqrt{3}(\sin B - \sin A \cos C) = \sin C \sin A$, 2分

又 $A+B+C=\pi$, 则 $\sqrt{3}[\sin(A+C) - \sin A \cos C] = \sin C \sin A$, 化简得 $\sqrt{3} \cos A \sin C = \sin C \sin A$. 4分

又 $\sin C > 0$, 所以 $\sqrt{3} \cos A = \sin A$, 则 $\tan A = \sqrt{3}$. 5分

因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$. 6分

(2) 由(1)知 $A = \frac{\pi}{3}$, 因为 $AD = \frac{1}{3}AC = \frac{1}{3}b$,

所以 $\triangle ABD$ 的面积为 $S = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}bc \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{12}bc = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, 解得 $bc = 9$, 8分

又 $b+c=6$, 所以 $b=c=3$, 所以 $AD=1$, 10分

在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理得 $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \times AB \times AD \times \cos 60^\circ = 7$, 则 $BD = \sqrt{7}$. 12分

18. (1) 因为 $AD \subset$ 平面 $ABCD$, $MO \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $MO \perp AD$. 1 分

因为 O 为线段 CD 的中点, E 为线段 AD 的中点, 所以 $DO = 2$, $DE = \sqrt{2}$, 2 分

因为 $\angle ADC = 45^\circ$, 由余弦定理得 $EO^2 = 2^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$,

则 $EO^2 + DE^2 = DO^2$, 则 $DE \perp EO$. 4 分

因为 $MO \cap EO = O$, 所以 $AD \perp$ 平面 MOE , 5 分

又因为 $AD \subset$ 平面 MAD , 所以平面 $MOE \perp$ 平面 MAD . 6 分

(2) 由(1)知当 E 为线段 AD 的中点时, $AE = DE = EO = \sqrt{2}$, 则 $AO = 2$,
所以 $DO^2 + OA^2 = AD^2$, 则 $DO \perp OA$, 所以 $\angle DAO = 45^\circ$. 8 分

所以 $S_{\triangle AOE} = \frac{1}{2} \times AE \times AO \times \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}AE}{2}$,

因为 $MC = 2\sqrt{2}$, $OC = 2$, 所以 $OM = 2$, 则 $V_{M-AOE} = \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{2}AE}{2} = \frac{1}{3}$, 解得 $AE = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 11 分

又 $AE = \lambda AD$, $AD = 2\sqrt{2}$, 所以 $AE = \frac{1}{4}AD$, 所以 $\lambda = \frac{1}{4}$. 12 分

19. (1) 当 $y = a \cdot x^b$ 得, $\ln y = \ln(a \cdot x^b) = \ln a + b \ln x$, 令 $u = \ln x$, $v = \ln y$, $c = \ln a$, 则 $v = c + bu$. 2 分

由表中数据可得, $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})^2} = \frac{0.4}{1.6} = 0.25$, 3 分

则 $\hat{c} = \bar{v} - \hat{b}\bar{u} = \frac{26.02}{5} - 0.25 \times \frac{16.1}{5} = 4.399$. 即 $\hat{v} = 4.399 + 0.25u$. 4 分

即 $\ln \hat{y} = 4.399 + 0.25 \ln x = \ln(e^{4.399} \cdot x^{0.25})$, 因为 $e^{4.399} = 81$, 所以 $\hat{y} = 81x^{\frac{1}{4}}$.

故所求的回归方程为 $y = 81x^{\frac{1}{4}}$. 6 分

(2) 设年收益为 W 万元, 则 $W = 4y - x - 120 = 324x^{\frac{1}{4}} - x - 120$, 8 分

对 $W = f(x)$ 求导, 得 $f'(x) = 81x^{-\frac{3}{4}} - 1$,

令 $81x^{-\frac{3}{4}} - 1 = 0$, 解得 $x = 243^{\frac{4}{3}} \approx 243 \times \frac{13}{9} = 351$, 10 分

当 $x \in (0, 351)$ 时 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (351, +\infty)$ 时 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

因此, 当 $x = 351$ 时 W 有最大值, 即该公司每年投入 351 万元营销费用时, 该产品一年的收益达到最大. 12 分

20. (1) 设椭圆右焦点的坐标为 $(c, 0)$ ($c > 0$), 则 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 即 $a = 2c$,

又 $a^2 = b^2 + c^2$, 则 $b^2 = 3c^2$, 1 分

因为点 $(1, \frac{3}{2})$ 在椭圆上,

所以 $\frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1$, 即 $\frac{1}{4c^2} + \frac{3}{4c^2} = 1$, 解得 $c = 1$, 2 分

则 $a = 2$, $b = \sqrt{3}$, 所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. 3 分

(2) 由(1)知 $F(1, 0)$, 因为直线 l 的斜率不为 0, 所以可设直线 l 的方程为 $x = ky + 1$,

参考答案 第 4 页(共 6 页)



代入椭圆 C 的方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 消去 x 化简得 $(3k^2 + 4)y^2 + 6ky - 9 = 0$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = \frac{-6k}{3k^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-9}{3k^2 + 4}$. 5 分

设线段 AB 的中点为 $Q(x_0, y_0)$, 则 $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-3k}{3k^2 + 4}, x_0 = ky_0 + 1 = \frac{-3k^2}{3k^2 + 4} + 1 = \frac{4}{3k^2 + 4}$, 即

$Q(\frac{4}{3k^2 + 4}, \frac{-3k}{3k^2 + 4})$, 则直线 m 的方程为 $y = -\frac{3k}{4}x$,

代入椭圆 C 的方程可得 $x = \pm \frac{4}{\sqrt{3k^2 + 4}}$, 不妨设 $M(\frac{4}{\sqrt{3k^2 + 4}}, \frac{-3k}{\sqrt{3k^2 + 4}}), N(-\frac{4}{\sqrt{3k^2 + 4}}, \frac{3k}{\sqrt{3k^2 + 4}})$.

7 分

$$|AB| = \sqrt{1+k^2} |y_1 - y_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(\frac{-6k}{3k^2 + 4})^2 - 4 \times \frac{-9}{3k^2 + 4}} =$$

$$\sqrt{1+k^2} \times \frac{12\sqrt{1+k^2}}{3k^2 + 4} = \frac{12(1+k^2)}{3k^2 + 4},$$
8 分

点 M, N 到直线 l 的距离分别为 $d_1 = \frac{|x_M - ky_M - 1|}{\sqrt{1+k^2}}, d_2 = \frac{|x_N - ky_N - 1|}{\sqrt{1+k^2}}$,

则四边形 $AMBN$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times |AB| \times d_1 + \frac{1}{2} \times |AB| \times d_2 = \frac{1}{2} \times |AB| \times (d_1 + d_2) = \frac{1}{2} \times$

$$|AB| \times (\frac{|x_M - ky_M - 1|}{\sqrt{1+k^2}} + \frac{|x_N - ky_N - 1|}{\sqrt{1+k^2}}).$$

因为点 M, N 在直线 l 的两侧, 所以 $S = \frac{1}{2} \times |AB| \times (\frac{|x_M - ky_M - 1|}{\sqrt{1+k^2}} + \frac{|x_N - ky_N - 1|}{\sqrt{1+k^2}}) = \frac{1}{2} \times |AB| \times$

$$\frac{|x_M - x_N - k(y_M - y_N)|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{1}{2} \times |AB| \times \frac{2\sqrt{3k^2 + 4}}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{1}{2} \times \frac{12(1+k^2)}{3k^2 + 4} \times \frac{2\sqrt{3k^2 + 4}}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{12\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{3k^2 + 4}}$$

$$= 4\sqrt{3} \sqrt{1 - \frac{1}{3k^2 + 4}},$$
11 分

因为 $0 < \frac{1}{3k^2 + 4} \leq \frac{1}{4}$, 所以 $6 \leq S < 4\sqrt{3}$.

因此, 四边形 $AMBN$ 的面积取值范围为 $[6, 4\sqrt{3})$. 12 分

21. (1) 由题意知 $f(x) = e^x \sin x + x + 1$, 则 $f'(x) = e^x \sin x + e \cos x + 1$,

又 $f'(0) = 2, f(0) = 1$, 则所求切线方程为 $y - 1 = 2(x - 0)$, 即 $y = 2x + 1$. 4 分

(2) $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x - m$, 5 分

设 $g(x) = e^x \sin x + e^x \cos x - m$, 则 $g'(x) = 2e^x \cos x$, 6 分

因为 $x \in (0, \frac{3\pi}{4})$, 令 $g'(x) = 0$, 得 $x = \frac{\pi}{2}$,

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $g'(x) > 0$, 则 $g(x)$ 单调递增; 当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ 时, $g'(x) < 0$, 则 $g(x)$ 单调递减. 7 分

又 $0 < m < 1$, 则 $g(0) = 1 - m > 0, g(\frac{3\pi}{4}) = -m < 0$, 则存在 $x_0 \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$, 使 $g(x_0) = 0$. 8 分

参考答案 第 5 页 (共 6 页)

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (x_0, \frac{3\pi}{4})$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 单调递减. 9分

$$\text{又 } f(0) = 1, f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} - m \times \frac{3\pi}{4} + 1 > \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} - \frac{3\pi}{4} + 1 > \frac{1}{2}e^2 - 3 + 1 > 1,$$

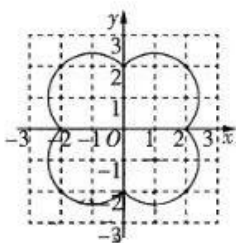
所以当 $0 < m < 1$ 时, 对任意的 $x \in (0, \frac{3\pi}{4})$, $f(x) > 1$ 恒成立. 12分

22. (1) 将直线的参数方程消去 t , 得普通方程为 $x + y - 2 = 0$.

曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 2|\sin \theta| + 2|\cos \theta|$, 即 $\rho^2 = 2|\rho \sin \theta| + 2|\rho \cos \theta|$,

又 $\rho^2 = x^2 + y^2, x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$, 所以曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - 2|x| - 2|y| = 0$.

则曲线 C 的简图如图所示.



5分

(2) 不妨设点 A 位于第一象限, 结合图形和直线 $m: \theta = \alpha (\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}])$ 可知,

$$\rho_A = 2\sin \alpha + 2\cos \alpha, \rho_B = -2\sin(\pi + \alpha) - 2\cos(\pi + \alpha) = 2\sin \alpha + 2\cos \alpha,$$

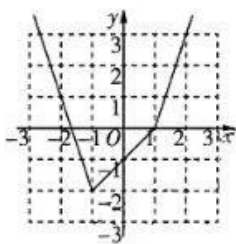
$$\text{则 } |AB| = \rho_A + \rho_B = 4\sin \alpha + 4\cos \alpha = 4\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{6}, \text{ 所以 } \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{又 } \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}], \text{ 所以 } \alpha + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right],$$

$$\text{则 } \alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3}, \text{ 所以 } \alpha = \frac{\pi}{12} \text{ 或 } \alpha = \frac{5\pi}{12}. \quad 10分$$

23. (1) 由题知 $f(x) = \begin{cases} -3x - 5, & x \leq -1, \\ x - 1, & -1 < x < 1, \\ 3x - 3, & x \geq 1 \end{cases}$

描点 $(-2, 1), (-1, -2), (1, 0), (2, 3)$, 连线得 $y = f(x)$ 的图象如图所示.



通过图象可知, 当 $x = -1$ 时, 函数 $y = f(x)$ 的最小值为 -2 , 即 $m = -2$. 5分

(2) 由(1)知 $m = -2$, 则 $a + b + c = -m + 1 = 3$,

$$\frac{a^2}{b} + b \geq 2a, \frac{b^2}{c} + c \geq 2b, \frac{c^2}{a} + a \geq 2c,$$

三个式子相加得 $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c = 3$, 当且仅当 $a = b = c = 1$ 时等式成立,

所以 $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$ 的最小值为 3 . 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线