

山东中学联盟高中名校 2019 级高三 12 月大联考 数学试题

命题学校: 诸城一中 审题学校: 滕州一中

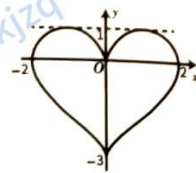
注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置。
2. 选择题的作答: 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题: (本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。每小题的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 设集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 \leq 0\}$, $B = \{x | 1 \leq x < 5\}$, 则 $A \cup B =$
 A. $[-1, 2)$ B. $[-1, 3]$ C. $[-1, 5)$ D. $[1, 3]$
2. 若复数 $z = \frac{1+i}{1-i} + 1$, 则 \bar{z} 的虚部为
 A. i B. $-i$ C. 1 D. -1
3. 若 $a = \log_3 2, b = \log_3 2, c = e^{0.2}$, 则 a, b, c 为
 A. $b < a < c$ B. $c < a < b$ C. $b < c < a$ D. $a < b < c$
4. 最早的测雨器记载见于南宋数学家秦九韶所著的《数书九章》(1247 年)。该书第二章为“天时类”, 收录了有关降水量计算的四个例子, 分别是“天池测雨”、“圆罍测雨”、“峻积验雪”和“竹器验雪”。其中“天池测雨”法是下雨时用一个圆台形的天池盆收集雨水来测量平地降雨量(盆中水的体积与盆口面积之比)。已知天池盆盆口直径为二尺八寸, 盆底直径为一尺二寸, 盆深一尺八寸。当盆中积水深九寸(注: 1 尺=10 寸)时, 平地降雨量是
 A. 9 寸 B. 7 寸 C. 8 寸 D. 3 寸
5. 如图, 一个“心形”由两个函数的图象构成, 则“心形”上部分的函数解析式可能为

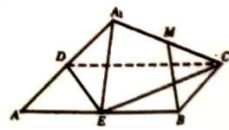
- A. $y = |x| \sqrt{4 - x^2}$
- B. $y = x \sqrt{4 - x^2}$
- C. $y = \sqrt{-x^2 + 2|x|}$
- D. $y = \sqrt{-x^2 + 2x}$



6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2e^{x-1}, & x < 1, \\ x^3 + x, & x \geq 1, \end{cases}$ 则 $f(f(x)) < 2$ 的解集为

高三数学试题 第 1 页 (共 4 页)

- A. $(1-\ln 2, +\infty)$ B. $(-\infty, 1-\ln 2)$ C. $(1-\ln 2, 1)$ D. $(1, 1+\ln 2)$
7. 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, A, B 是椭圆上关于 x 轴对称的两点, AF_2 的中点 P 恰好落在 y 轴上, 若 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AF_2} = 0$, 则椭圆 C 的离心率的值为
- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
8. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = 3^x - 1$, 则使不等式 $f(e^x - 3e^{-x}) < \frac{8}{9}$ 成立的 x 的取值范围是
- A. $(\ln 3, +\infty)$ B. $(0, \ln 3)$ C. $(-\infty, \ln 3)$ D. $(-1, 3)$
- 二、多项选择题: (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)
9. 下列说法中错误的是
- A. 已知 $\vec{a} = (1, -3), \vec{b} = (-2, 6)$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 可以作为平面内所有向量的一组基底
- B. 直线 l 的方向向量为 $\vec{a} = (1, -1, 2)$, 直线 m 的方向向量为 $\vec{b} = (2, 1, -\frac{1}{2})$, 则 l 与 m 垂直
- C. 若两非零向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, 则 $\vec{a} \perp \vec{b}$
- D. 平面直角坐标系中, $A(1, 1), B(4, 2), C(5, 0)$, 则 $\triangle ABC$ 为锐角三角形
10. 若 a, b 为正实数, 则 $a > b$ 的充要条件为
- A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ B. $\ln a > \ln b$ C. $b \ln a < a \ln b$ D. $a - b < e^a - e^b$
11. 设函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x - \cos \omega x (\omega > 0)$, 已知 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上有且仅有 3 个零点, 则下列结论正确的是
- A. 在 $(0, \pi)$ 上存在 x_1, x_2 , 满足 $f(x_1) - f(x_2) = 4$ B. $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有 2 个最大值点
- C. $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增 D. ω 的取值范围为 $[\frac{13}{6}, \frac{19}{6})$
12. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2AD$, E 为边 AB 的中点, 将 $\triangle ADE$ 沿直线 DE 翻折成 $\triangle A_1DE$. 若 M 为线段 A_1C 的中点, 则在 $\triangle ADE$ 翻折过程中, 下面四个命题中正确的是
- A. $|BM|$ 是定值 B. 点 M 运动轨迹在某个圆周上
- C. 存在某个位置, 使 $DE \perp A_1C$ D. A_1 不在底面 BCD 上时, 则 $MB \parallel$ 平面 A_1DE



三、填空题: (本题共4个小题, 每小题5分, 共20分, 其中16题第一空2分, 第二空3分)

13. 已知 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 3\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$, 则 $\tan 2\theta =$ _____
14. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{2}, \vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角是 _____.
15. 能说明“若 $f(x) > f(0)$ 对任意的 $x \in (0, 2]$ 都成立, 则 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上是增函数”为假命题的一个函数是 _____.
16. 复印纸幅面规格采用A系列, 其幅面规格为: ① $A_1, A_2, A_3, \dots, A_6$ 所有规格的纸张的幅宽(以 x 表示)和长度(以 y 表示)的比例关系都为 $x:y = 1:\sqrt{2}$; ②将 A_1 纸张沿长度方向对开成两等分, 便成为 A_2 规格; A_2 纸张沿长度方向对开成两等分, 便成为 A_3 规格; ……; 如此对开至 A_6 规格, 现有 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_6$ 纸各一张, 若 A_6 纸的幅宽为 2dm , 则 A_1 纸的面积为 _____ dm^2 , 这9张纸的面积之和等于 _____ dm^2 .

四、解答题: 本题共6小题, 共70分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (10分) 下面问题的条件① $BA = 3$, ② $BC = \sqrt{7}$, ③ $BD = \sqrt{7}$, ④ $\angle A = 60^\circ$ 有多余, 现请你在① $BA = 3$, ④ $\angle A = 60^\circ$ 中删去一个, 并将剩下的三个作为条件解答这个问题. 已知 $\triangle ABC$ 中, D 是 AC 边的中点, 你删去的条件是 _____ 请写出用剩余条件解答本题的过程.
- (1) 求 AC 的长;
- (2) $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 E , 求 AE 的长.
- 注: 如果选择删去条件①和条件④分别解答, 按第一个解答计分.

18. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = -1$, 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n + n^2 = n(a_n + 1)$,
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 若 $b_n = a_n^2 \cos \frac{n\pi}{2}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前100项和 T_{100} .

19. (12分) 《九章算术》是古代中国乃至东方的第一部自成体系的数学专著, 书中记载了一种名为“刍甍”的五面体. “刍甍”字面意思为茅草屋顶, 图1是一栋农村别墅, 为全新的混凝土结构, 它由上部屋顶和下部主体两部分组成. 如图2, 屋顶五面体为刍甍”, 其中前后两坡屋面 $ABFE$ 和 $CDEF$ 是全等的等腰梯形, 左右两坡屋面 EAD 和 FBC 是全等的三角形, 点 F 在平面 $ABCD$ 和 BC 上射影分别为 H, M , 已知 $HM = 5\text{m}$, $BC = 10\text{m}$, 梯形 $ABFE$ 的面积是 $\triangle FBC$ 面积的2.2倍. 设 $\angle FMH = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$.



图1

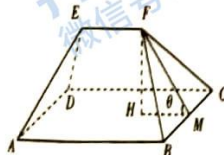


图2

高三数学试题 第3页 (共4页)

- (1) 求屋顶面积 S 关于 θ 的函数关系式;
 (2) 已知上部屋顶造价与屋顶面积成正比, 比例系数为常数 $k(k > 0)$, 下部主体造价与其高度成正比, 比例系数为 $16k$, 现欲造一栋总高度为 6m 的别墅, 试问: 当 θ 为何值时, 总造价最低?

20. (12分) 如图 1, 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 4, E, F 分别为 AD, BC 的中点, 将正方形 $ABCD$ 沿 EF 折成如图 2 所示的二面角, 且二面角的大小为 60° , 点 M 在线段 AB 上 (包含端点) 运动, 连接 AD .

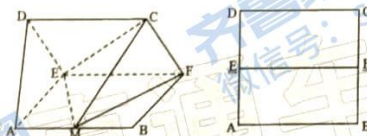


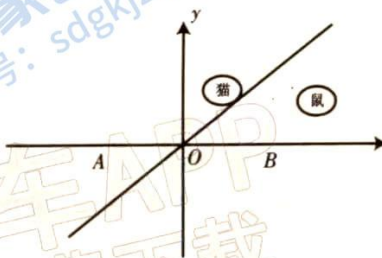
图 2

图 1

- (1) 若 M 为 AB 的中点, 直线 MF 与平面 ADE 的交点为 O , 试确定点 O 的位置, 并证明直线 $OD \parallel$ 平面 EMC ;
 (2) 是否存在点 M , 使得直线 DE 与平面 EMC 所成的角为 60° ? 若存在, 确定出 M 点位置; 若不存在, 请说明理由.

21. (12分) 2018 年世界人工智能大会已于 2018 年 9 月在上海徐汇西岸举行, 某高校的志愿服务小组受大会展示项目的启发, 会后决定开发一款“猫捉老鼠”的游戏. 如图所示, A, B 两个信号源相距 10 米, O 是 AB 的中点, 过 O 点的直线 l 与直线 AB 的夹角为 45° , 机器猫在直线 l 上运动, 机器鼠的运动轨迹始终满足: 接收到 A 点的信号比接收到 B 点的信号晚 $\frac{8}{v_0}$ 秒 (注: 信号每秒传播 v_0 米). 在时刻 t_0 时,

测得机器鼠距离 O 点为 4 米.



- (1) 以 O 为原点, 直线 AB 为 x 轴建立平面直角坐标系 (如图), 求时刻 t_0 时机器鼠所在位置的坐标;
 (2) 游戏设定: 机器鼠在距离直线 l 不超过 1.5 米的区域运动时, 有“被抓”的风险. 如果机器鼠保持目前的运动轨迹不变, 是否有“被抓”风险?

22. (12分) 已知 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 3\ln x$, $g(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2 - a\ln x$.

- (I) 求 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程;
 (II) 已知 $F(x) = g(x) - \frac{1}{6}x^3$ 的两个零点为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 且 x_0 为 $F(x)$ 的唯一极值点.
 (1) 求实数 a 的取值范围; (2) 求证: $x_1 + 3x_2 > 4x_0$.

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。



微信搜一搜

齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索