

河南、河北两省重点高中 2020 届高三阶段性考试（三）

数 学（理科）

考生注意：

1. 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容：复数，集合与常用逻辑用语，函数与导数，三角与向量，数列，不等式。

第 I 卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

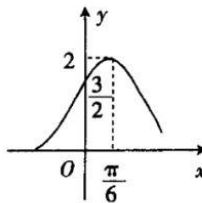
1. 已知全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，集合 $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 4, x \in \mathbf{N}\}$ ， $B = \{x \mid 6 < 2^x < 33, x \in \mathbf{N}\}$ ，则 $(\complement_U A) \cap B =$
 A. $\{0, 5, 6\}$ B. $\{0, 5\}$ C. $\{1\}$ D. $\{5\}$
2. 复数 $z = \frac{2i^3}{1+i}$ 的虚部为
 A. -1 B. 1 C. $-i$ D. i
3. 在公比为 2 的等比数列 $\{a_n\}$ 中，前 n 项和为 S_n ，且 $S_7 - 2S_6 = 1$ ，则 $a_1 + a_5 =$
 A. 5 B. 9 C. 17 D. 33
4. 已知向量 $\mathbf{m} = (\lambda + 1, 1)$ ， $\mathbf{n} = (\lambda + 2, 2)$ ，若 $(2\mathbf{m} + \mathbf{n}) \parallel (\mathbf{m} - 2\mathbf{n})$ ，则 $\lambda =$
 A. -1 B. 0 C. 1 D. 2
5. 已知 $\sin 2\alpha = \cos \alpha$ ， $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，则 $\cos 2\alpha =$
 A. $\frac{3}{4}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$
6. “ $a < -1$ ”是“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, a \sin x_0 + 1 < 0$ ”的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
7. 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) + 1$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后得函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(x) =$

A. $\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$

B. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

C. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$

D. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$



8. 函数 $f(x) = x^{2019} + a - 1 - 3\sin x$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数, 则 $f(x)$ 的零点的个数为

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

9. 已知 $a, b \in (0, +\infty)$, 且 $1 + \frac{2}{ab} = \frac{9}{a+b}$, 则 $a+b$ 的取值范围是

- A. $[1, 9]$ B. $[1, 8]$ C. $[8, +\infty)$ D. $[9, +\infty)$

10. 已知正 $\triangle ABC$ 的边长为 1, EF 为该三角形内切圆的直径, P 在 $\triangle ABC$ 的三边上运动, 则 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 的最大值为

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

11. 方程 $\log_6(4^x + 5^x) = \log_4(6^x - 5^x)$ 的实根个数为

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

12. 设首项为 1 的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_n = \begin{cases} a_{n-1} + 1, & n = 2k, k \in \mathbf{N}^*, \\ 2a_{n-1} + 1, & n = 2k + 1, k \in \mathbf{N}^*. \end{cases}$ 若 $S_m >$

2020, 则正整数 m 的最小值为

- A. 15 B. 16 C. 17 D. 18

第 II 卷

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y + 1 \geq 0, \\ x - y \geq 0, \\ x + y - 5 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = x + 3y$ 的最大值为_____.

14. 已知 α 为第二象限角, 则 $\cos \alpha \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} + \sin^2 \alpha \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}} =$ _____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 a, b, c 成等比数列, 且 $b = a \cos C + c \sin A$, 则 $\frac{b \sin B}{c} =$ _____.

16. 已知直线 $y = kx + b$ 是曲线 $y = e^x$ 的一条切线, 则 $k + b$ 的取值范围是_____.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 0$, 其前 n 项和为 S_n , 且 $S_5 = 62$, a_4, a_5 的等差中项为 $3a_3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{(\log_2 a_n)(\log_2 a_{n+2})}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} 4^x - 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1 - 4^{-x}, & x < 0. \end{cases}$

(1) 判断 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇偶性, 并证明之;

(2) 求不等式 $-1 < f(\log_4 x) \leq 3$ 的解集.

19. (12分)

已知函数 $f(x) = \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

(1) 若 $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{6}$, $\tan \beta = \sqrt{5}$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 求 $\tan(2\alpha + \beta)$ 的值;

(2) 若动直线 $x = t$ ($t \in [0, \pi]$) 与函数 $f(x)$ 和函数 $g(x) = \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

的图象分别交于 P, Q 两点, 求线段 PQ 长度的最大值, 并求出此时 t 的值.

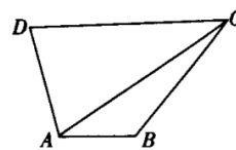
20. (12分)

如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB = \sqrt{3} - 1$, $BC = \sqrt{3} + 1$, $CA = 3$, 且角 D 与角 B 互

补, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{3}{2}$.

(1) 求 $\triangle ACD$ 的面积;

(2) 求 $\triangle ACD$ 的周长.



21. (12分)

设 $a \in \mathbf{R}$, 命题 p : 函数 $y = \log_a(x^3 - ax)$ ($a > 0, a \neq 1$) 在区间 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 内单调递增;

q : 函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4a}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1$ 仅在 $x=0$ 处有极值.

(1) 若命题 q 是真命题, 求 a 的取值范围;

(2) 若命题 $p \vee (\neg q)$ 是真命题, 求 a 的取值范围.

22. (12分)

已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = x \ln x - ax + 1 + a(x-1)^2$, $g(x) = \frac{1 + \ln x}{3 - 2x}$.

(1) 求 $g(x)$ 的单调区间.

(2) 讨论 $f(x)$ 零点的个数.

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主招生在线官方微信号：zizzsw。



微信扫一扫，快速关注