

## 哈尔滨市第九中学 2023 届高三第三次模拟考试 数学试卷

本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题），满分 150 分，考试时间 120 分钟

### 第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合  $A = [-2, 0]$ ,  $B = \{x | 4x^2 + 12x - 7 \leq 0\}$ , 则 ( )

A.  $\forall x \in A, x \notin B$       B.  $\forall x \in B, x \in A$       C.  $\exists x \in A, x \notin B$       D.  $\exists x \in B, x \in A$

2. 已知复数  $z$  满足  $i(2z-1) = 2+3i$ , 则复数  $z$  的虚部为 ( )

A. 1      B. -1      C.  $i$       D.  $-i$

3. 已知  $m, n$  表示空间内两条不同的直线, 则使  $m // n$  成立的必要不充分条件是 ( )

A. 存在平面  $\alpha$ , 有  $m // \alpha, n // \alpha$       B. 存在平面  $\alpha$ , 有  $m \perp \alpha, n \perp \alpha$

C. 存在直线  $l$ , 有  $m \perp l, n // l$       D. 存在直线  $l$ , 有  $m // l, n // l$

4.  $f(x)$  是定义在  $R$  上的函数,  $f(x + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}$  为奇函数, 则  $f(2023) + f(-2022) =$  ( )

A. -1      B.  $-\frac{1}{2}$       C.  $\frac{1}{2}$       D. 1

5. “第二课堂”是哈九中多样化课程的典型代表, 旨在进一步培养学生的人文底蕴和科学精神, 为继续满足同学们不同兴趣爱好, 美育中心精心准备了大家非常喜爱的中华文化遗产系列的第二课堂活动课: 陶艺, 拓印, 扎染, 创意陶盆, 壁挂, 剪纸六个项目供同学们选学, 则甲、乙、丙、丁这 4 名学生至少有 3 名学生所选的课全不相同的方法共有 ( )

A. 135 种      B. 720 种      C. 1080 种      D. 1800 种

6. 已知  $\sqrt{3} \sin \alpha - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{5}$ , 则  $\cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2\alpha\right) =$  ( )

A.  $-\frac{7}{25}$       B.  $\frac{9}{25}$       C.  $\frac{7}{25}$       D.  $\frac{24}{25}$

7. 英国数学家贝叶斯在概率论研究方面成就显著, 根据贝叶斯统计理论, 随机事件  $A, B$  存在如

下关系:  $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$ . 2023 贺岁档电影精彩纷呈, 有几部影片是小明想去影院看

的. 小明同学家附近有甲、乙两家影院, 他打算利用周末的两天时间都去这两家影院观看. 小明第一天去甲、乙两家影院观影的概率分别为 0.4 和 0.6. 如果他第一天去甲影院, 那么第二天去甲影院的概率为 0.6; 如果第一天去乙影院, 那么第二天去甲影院的概率为 0.5, 则小明同学( )

- A. 第二天去甲影院的概率为 0.44  
B. 第二天去乙影院的概率为 0.44  
C. 第二天去了甲影院, 则第一天去乙影院的概率为  $\frac{4}{9}$   
D. 第二天去了乙影院, 则第一天去甲影院的概率为  $\frac{8}{23}$

8. 已知  $a = \frac{9-e}{3+e}$ ,  $b = \ln 3$ ,  $c = 2\ln 2 - \frac{2}{7}$ , 则 ( )

- A.  $c > b > a$       B.  $a > b > c$       C.  $c > a > b$       D.  $b > a > c$

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知向量  $\vec{a} = (1, -2)$ ,  $\vec{b} = (-1, m)$ , 则正确的是 ( )

- A. 若  $m = 1$ , 则  $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{13}$   
B. 若  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , 则  $m = 2$   
C. 若  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为钝角, 则  $m > -\frac{1}{2}$   
D. 若向量  $\vec{c}$  是与  $\vec{a}$  同向的单位向量, 则  $\vec{c} = (\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5})$

10. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过  $F_2$  作斜率为  $\sqrt{7}$  的直

线与双曲线的右支交于  $A, B$  两点 ( $A$  在第一象限),  $|AB| = |BF_1|$ ,  $P$  为线段  $AB$  的中点,  $O$  为坐标原点, 则下列说法正确的是 ( )

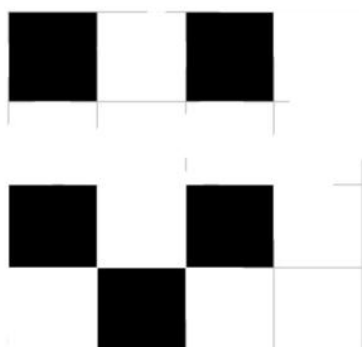
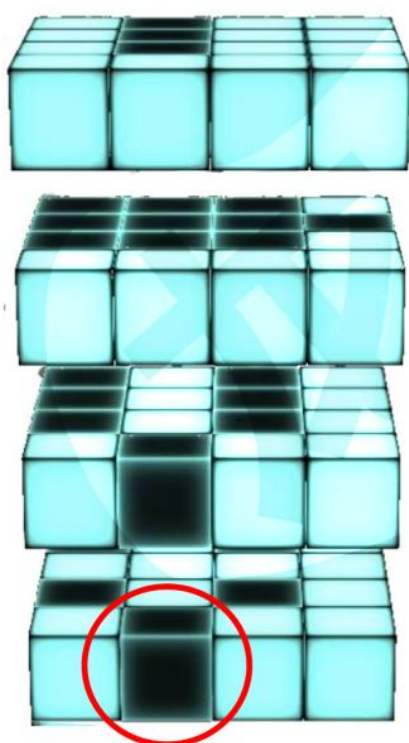


14. 我国古代数学著作《九章算术》有如下问题：“今有蒲（水生植物名）生一日，长三尺；莞（植物名，俗称水葱、席子草）生一日，长一尺. 蒲生日自半，莞生日自倍. 问几何日而长等？”意思是：今有蒲生长1日，长为3尺；莞生长1日，长为1尺. 蒲的生长逐日减半，莞的生长逐日增加1倍. 若蒲、莞长度相等，则所需的时间约为\_\_\_\_\_日.

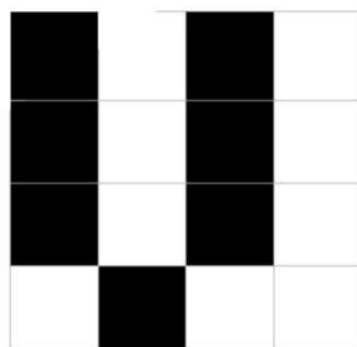
（结果保留一位小数，参考数据： $\lg 2 \approx 0.30$ ， $\lg 3 \approx 0.48$ ）

15. 已知 $x, y$ 都是正数，且 $x + y = 2$ ，则 $\frac{4}{x+2} + \frac{1}{y+1}$ 的最小值为\_\_\_\_\_.

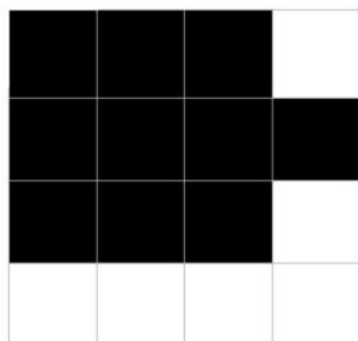
16. 哈九中第二课堂兴趣课学生进行黑白迭代的游戏，规则为：点击方块，方块本身及其前、后、左、右、上、下相邻的块进行黑白状态反转，当所有块都为白色时则视为过关，用方块所在行、列、层描述位置，从下至上依次为第1-4层，如所圈画方块坐标为 $(4,2,1)$ ，如图所示的某关卡由四层 $4 \times 4$ 方块构成，其中一种通关方法为：依次点击 $(2,2,4) - (2,1,3) - (2,3,3) - (1,2,2) - (3,2,2) - (1,2,1) -$ \_\_\_\_\_。请补全最后一步，用坐标表示。



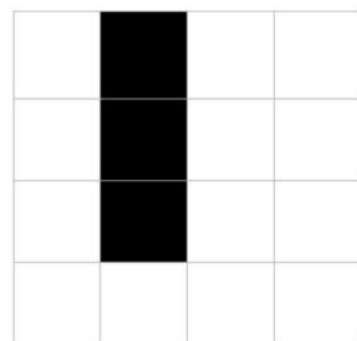
第一层



第二层



第三层



第四层



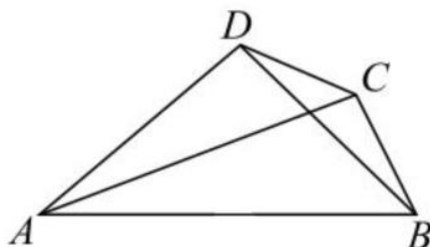
四、解答题：本题共 6 小题，满分 70 分（17 题 10 分，18 题至 22 题 12 分）。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. 如图，在平面四边形  $ABCD$  中， $AC = \sqrt{7}$ ， $AB = 3$ ，

$$\angle DAC = \angle BAC, \sin \angle BAC = \frac{\sqrt{21}}{14}$$

(1) 求边  $BC$ ；

(2) 若  $\angle CDA = \frac{2\pi}{3}$ ，求四边形  $ABCD$  的面积。



18. 记  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和，已知  $a_1 = 1$ ， $S_n = \frac{(n+2)a_n}{3}$ 。

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式；

(2) 证明： $\frac{1}{2a_1+1} + \frac{1}{2a_2+2} + \dots + \frac{1}{2a_n+n} < \frac{3}{4}$ 。

19. 为普及航空航天科技相关知识、发展青少年航空航天科学素养，某中学组织开展“筑梦空天”航空航天知识竞赛。竞赛试题有甲、乙、丙三类（每类题有若干道），各类试题的每题分值及小明答对概率如下表所示，各小题回答正确得到相应分值，否则得 0 分，竞赛分三轮答题依次进行，各轮得分之和即为选手总分。

题型 \ 项目	每小题分值	每小题答对概率
甲类题	10	$\frac{3}{4}$
乙类题	20	$\frac{2}{3}$
丙类题	30	$\frac{1}{2}$

其竞赛规则为：第一轮，先回答一道甲类题，若正确，进入第二轮答题；若错误，继续回答另一道甲类题，该题回答正确，同样进入第二轮答题，否则，退出比赛。

第二轮，在乙类题或丙类题中选择一道作答。若正确，进入第三轮答题，否则，退出比赛。

第三轮，在前两轮未作答的那一类试题中选择一道作答。

小明参加竞赛，有两种方案选择，方案一：先答甲类题，再答乙类题，最后答丙类题；

方案二：先答甲类题，再答丙类题，最后答乙类题。各题答对与否互不影响。请完成以下解答：

(1) 若小明选择方案一，求答题次数恰好为3次的概率；

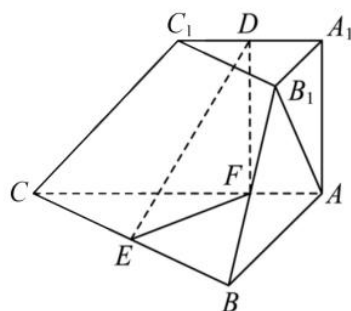
(2) 经计算小明选择方案一所得总分的数学期望为  $\frac{125}{4}$ ，为使所得总分的数学期望最大，小明该选择哪一种方案？并说明理由。

20. 已知三棱台  $A_1B_1C_1-ABC$  中， $AA_1 \perp$  底面  $ABC$ ， $AB=AC=2$ ， $AA_1=A_1B_1=1$ ， $AB_1 \perp A_1C_1$ ，

$E$ 、 $F$  分别是  $BC$ 、 $BB_1$  的中点， $D$  是棱  $A_1C_1$  上的点。

(1) 求证： $AB_1 \perp DE$ ；

(2) 若  $D$  是线段  $A_1C_1$  的中点，平面  $DEF$  与  $A_1B_1$  的交点记为  $M$ ，求二面角  $C-AM-E$  的余弦值。



21. 已知椭圆  $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  与抛物线  $C_2: y^2 = 4ax$  的图象在第一象限交于点  $P$ 。

若椭圆的右顶点为  $B$ ，且  $|PB| = \frac{6}{5}a$ 。

(1) 求椭圆  $C_1$  的离心率；

(2) 若椭圆  $C_1$  的焦距为 2，直线  $l$  过点  $B$  且不与坐标轴垂直。设  $l$  与椭圆  $C_1$  相交于不同于  $B$  的另一点  $D$ ， $l$  与抛物线  $C_2$  相交于不同于  $B$  的两点  $M$ 、 $N$ ，且  $|\overrightarrow{BD}|^2 = \lambda |\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{OB}|$ ，求实数  $\lambda$  的取值范围。

22. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{x} + a \ln x (a \in R)$ 。

(1) 当  $a = 4$  时，求  $f(x)$  的零点个数；

(2) 若  $f(x+1) + e^x - \frac{1}{x+1} \geq 1$  恒成立，求实数  $a$  的值。

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

