

绝密★考试结束前（暑假返校联考）

Z20 名校联盟（浙江省名校新高考研究联盟）2023 届高三第一次联考

数学试题卷

命题：海宁高级中学 方兰、杜海清 审题：路桥中学 朱映颖 新昌中学 赵洋 山东省 张志海 校稿：刘春苗

注意事项：

1. 答卷前，务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 请保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集为 \mathbf{R} ，集合 $A = \{x | x^2 - 3x \leq 0\}$ ， $B = \{x | x \leq 1\}$ ，则 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) =$
 - A. $\{x | 0 < x < 1\}$
 - B. $\{x | 1 < x < 3\}$
 - C. $\{x | 0 < x < 3\}$
 - D. $\{x | x > 3\}$
2. 若复数 $z = \frac{1-7i}{1+i}$ ，则
 - A. $|z| = 5$
 - B. 复数 z 在复平面上对应的点在第二象限
 - C. 复数 z 的实部与虚部之积为 -12
 - D. $\bar{z} = 3 + 4i$
3. $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中的常数项为
 - A. -60
 - B. 60
 - C. 64
 - D. 120
4. 《九章算术·商功》中，将四个面都是直角三角形的四面体称为鳖臑。在鳖臑 $ABCD$ 中， $AB \perp$ 平面 BCD ， $BC \perp CD$ ，且 $AB = 1$ ， $BC = 2$ ， $CD = 3$ ，则四面体 $ABCD$ 外接球的表面积为
 - A. $\frac{14\pi}{3}$
 - B. 7π
 - C. 13π
 - D. 14π
5. 已知正实数 x, y 满足 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + 4 = x + y$ ，则 $x + y$ 的最小值为
 - A. $\sqrt{13} - 2$
 - B. 2
 - C. $2 + \sqrt{13}$
 - D. $2 + \sqrt{14}$
6. 已知点 $A(4, 0)$ ， $B(0, 4)$ ，直线 $l: x = \frac{25}{4}$ ，动点 P 到点 A 的距离和它到直线 l 的距离之比为 $4:5$ ，则 $|PB|$ 的最大值是
 - A. $\sqrt{41}$
 - B. 7
 - C. $5\sqrt{2}$
 - D. $2\sqrt{13}$
7. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ，且 $f(x+1) + f(x-1) = 2$ ， $f(x+2)$ 为偶函数，若 $f(0) = 0$ ， $\sum_{k=1}^n f(k) = 111$ ，则 n 的值为
 - A. 107
 - B. 118
 - C. 109
 - D. 110

Z20 名校联盟（浙江省名校新高考研究联盟）2023 届高三第一次联考 数学试题卷 第 1 页 共 4 页

8. 已知向量 a, b, c 满足 $|a|=1$, $2a+b=0$, $2|c-a|=|c-b|$, 则向量 $c-b$ 与 a 夹角的最大值是

- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{3}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 盒中装有大小相同的 5 小球 (编号为 1 至 5), 其中黑球 3 个, 白球 2 个. 每次取一球 (取后放回), 则

- A. 每次取到 1 号球的概率为 $\frac{1}{5}$
 B. 每次取到黑球的概率为 $\frac{2}{5}$
 C. “第一次取到黑球”和“第二次取到白球”是相互独立事件
 D. “每次取到 3 号球”与“每次取到 4 号球”是对立事件

10. 已知函数 $f(x)=x-[x]$, 其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, 如: $[0.2]=0$, $[-1.2]=-2$, 则

- A. $f(x)$ 是增函数 B. $f(x)$ 是周期函数
 C. $f(2x)$ 的值域为 $[0,1)$ D. $f(2x)$ 是偶函数

11. 设抛物线 $C: x^2=4y$ 的焦点为 F , 过点 F 的直线与 C 交于 A, B 两点, C 的准线与 y 轴交于点 M , O 为坐标原点, 则

- A. 线段 AB 长度的最小值为 4
 B. 若线段 AB 中点的横坐标为 2, 则直线 AB 的斜率为 1
 C. $\angle AMB > \frac{\pi}{2}$
 D. $\angle AMO = \angle BMO$

12. 已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $g(x)=xe^{-x}$, 若存在 $x_1 \in (0, +\infty)$, $x_2 \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x_1)=g(x_2)=k$ 成立, 则

- A. 当 $k > 0$ 时, $x_1 + x_2 > 1$ B. 当 $k > 0$ 时, $x_1 + e^{x_2} < 2e$
 C. 当 $k < 0$ 时, $x_1 + x_2 < 1$ D. 当 $k < 0$ 时, $\frac{x_2}{x_1} \cdot e^k$ 的最小值为 $-\frac{1}{e}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的最小正周期为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 毕达哥拉斯树是由古希腊数学家毕达哥拉斯根据勾股定理画出来的一个可以无限重复的图形, 因为重复数次后的形状好似一棵树, 所以被称为毕达哥拉斯树, 也叫“勾股树”. 毕达哥拉斯树的生长方式如下: 以边长为 1 的正方形的一边作为斜边, 向外做等腰直角三角形, 再以等腰直角三角形的两直角边为边向外作正方形, 得到 2 个新的小正方形, 实现了一次生长, 再将这两个小正方形各按照上述方式生长, 如此重复下去, 设第 n 次生长得到的小正方形的个数为 a_n , 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \underline{\hspace{2cm}}$.



第 14 题图

15. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $AA_1=1$, $AB=2$, 则直线 AA_1 与平面 B_1CD_1 所成角的正弦值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 设直线 $l: (a+2)x - (a-1)y - 3a - 3 = 0$ ($a \in \mathbf{R}$) 与圆 $C: x^2 + (y-1)^2 = r^2$ ($r > 0$) 交于 A, B 两点, 当 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 2 时, a 的值为 .

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $b(\sqrt{3}\sin A - \cos C) = (c-a)\cos B$.

(I) 求 B ;

(II) 在①重心, ②内心, ③外心这三个条件中选择一个补充在下面问题中, 并解决问题.

若 $a=5, c=3$, O 为 $\triangle ABC$ 的 , 求 $\triangle OAC$ 的面积.

注: 如果选择多个条件分别解答, 则按第一个解答计分.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1=1$, $\frac{a_n}{\sqrt{S_n S_{n-1}}} = \frac{1}{\sqrt{S_{n-1}}} + \frac{1}{\sqrt{S_n}}$ ($n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \geq 2$).

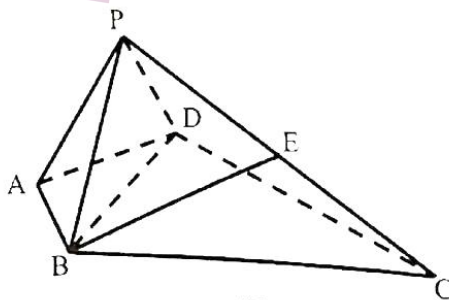
(I) 求证: 数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列, 并求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 当 $n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$ 时, 求证: $\frac{1}{a_2^2 - 1} + \frac{1}{a_3^2 - 1} + \dots + \frac{1}{a_n^2 - 1} < \frac{1}{4}$.

19. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $PA=AD=2$, $BD=4$, $AB=2\sqrt{3}$, BD 是 $\angle ADC$ 的平分线, 且 $BD \perp BC$.

(I) 若点 E 为棱 PC 的中点, 证明: $BE \parallel$ 平面 PAD ;

(II) 已知二面角 $P-AB-D$ 的大小为 60° , 求平面 PBD 和平面 PCD 的夹角的余弦值.



第 19 题图

20. 随着时代的不断发展, 社会对高素质人才的需求不断扩大, 我国本科毕业生中考研人数也不断攀升, 2020 年的考研人数是 341 万人, 2021 年考研人数是 377 万人. 某省统计了该省其中四所大学 2022 年的毕业生人数及考研人数 (单位: 千人), 得到如下表格:

	A 大学	B 大学	C 大学	D 大学
2022 年毕业生人数 x (千人)	7	6	5	4
2022 年考研人数 y (千人)	0.5	0.4	0.3	0.2

- (I) 已知 y 与 x 具有较强的线性相关关系, 求 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$;
 (II) 假设该省对选择考研的大学生每人发放 0.5 万元的补贴.
 (i) 若该省 E 大学 2022 年毕业生人数为 8 千人, 估计该省要发放补贴的总金额;
 (ii) 若 A 大学的毕业生中小浙、小江选择考研的概率分别为 $p, 3p-1$, 该省对小浙、小江两人的考研补贴总金额的期望不超过 0.75 万元, 求 p 的取值范围.

参考公式:
$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

21. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 且点 $(3, \sqrt{2})$ 在 C 上.

- (I) 求双曲线 C 的方程;
 (II) 试问: 在双曲线 C 的右支上是否存在一点 P , 使得过点 P 作圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的两条切线, 切点分别为 A, B , 直线 AB 与双曲线 C 的两条渐近线分别交于点 M, N , 且 $S_{\triangle MON} = \frac{\sqrt{3}}{33}$? 若存在, 求出点 P ; 若不存在, 请说明理由.

22. 已知函数 $f(x) = x \ln x - x - \frac{1}{2}ax^2, a \in \mathbf{R}$.

- (I) 当 $a = \frac{2}{e^2}$ 时, 证明: $f(x) \leq 0$;
 (II) 若函数 $H(x) = f(x) - (x-1)e^x + ax^2 + x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 求 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线