2021年高考精准备考原创押题卷(一)·数学(文科)

[满分150分,用时120分钟]

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的学校、姓名、班级、准考证号填写在答题卡上相应的位置。
2. 全部答案在答题卡上完成,答在本试卷上无效。
3. 回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案用0.5毫米及以上黑色笔迹签字笔写在答题卡上。
4. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

参考公式:锥体的体积公式:$V=\frac{1}{3}Sh$(其中S为锥体的底面积,h为锥体的高)

一、选择题(本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合$A=\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$,$B=\{y|y=2x+a,x\in A\}$,若$A\subseteq B$,则实数$a$的取值范围为 ( )

A. $[1,2]$　　B. $[-1,1]$　　C. $[-2,2]$　　D. $[-2,-1]$

2. 复数$\frac{4i}{1+\sqrt{3}i}$的虚部为 ( )

A. i　　B. $-$i　　C. 1　　D. -1

3. 已知样本数据为x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,该样本平均数为4,方差为2,现加入一个数4,得到新样本的平均数为$\overline{x}$,方差为s^2,则 ( )

A. $\overline{x}>4,s^2>2$　　B. $\overline{x}=4,s^2>2$　　C. $\overline{x}<4,s^2<2$　　D. $\overline{x}=4,s^2<2$

4. 某工厂产生的废气经过过滤后排放,过滤过程中废气的污染物数量P(mg/L)与时间t(h)之间的关系为$P=P_0e^{-kt}$.如果前2小时消除了20%的污染物,则污染物减少50%大约需要的时间为(参考数据:$\ln 2\approx 0.69$,$\ln 3\approx 1.10$,$\ln 5\approx 1.61$) ( )

A. 4 h　　B. 6 h　　C. 8 h　　D. 10 h

5. 设抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F,点A是抛物线C的准线与x轴的交点,若抛物线C上的点M满足$|MA|=\sqrt{2}|MF|$,则$|MF|=$ ( )

A. 4　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

6. 在平行四边形$ABCD$中,$AB=2BC=2$,M是CD的中点,若$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DC}=3$,则$\angle BAD=$ ( )

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{3\pi}{4}$

7. 若数列$\{a_n\}$满足:$a_1=19$,$a_{n+1}=a_n-3(n\in\mathbf{N}^*)$,则数列$\{a_n\}$的前$n$项和最大时,$n$的值为 ( )

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

8. 已知$\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,且$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$,则$\tan\theta=$ ( )

A. 7　　B. $\frac{12}{5}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{1}{7}$

9. 在《通用技术》课上，某小组同学准备用一个棱长为 6 的正四面体坯料制作一个正三棱柱模型(其底面在正四面体的一个面上)，要求削去的材料尽可能少，则所制作的正三棱柱模型的高为 (　　)

A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$　　C. 4　　D. $2\sqrt{6}$

10. 已知点 $P(x,y)$是直线 $kx+y+4=0(k>0)$上一动点，PA，PB 是圆 $C:x^2+y^2-2y=0$ 的两条切线，A，B 是切点，若四边形 $PACB$ 的最小面积是 2，则 k 的值为 (　　)

A. 3　　B. $\frac{\sqrt{21}}{2}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 2

11. 设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_2 的直线与双曲线的右支交于两点 A，B，若$|AF_1|:|AB|=3:4$，且 F_2 是 AB 的一个四等分点，则双曲线 C 的离心率是 (　　)

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 5

12. 设 $a=2\,022\ln 2\,020$，$b=2\,021\ln 2\,021$，$c=2\,020\ln 2\,022$，则 (　　)

A. $a>c>b$　　B. $c>b>a$　　C. $b>a>c$　　D. $a>b>c$

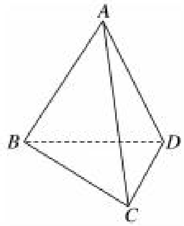
二、填空题(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

13. 若实数 x,y 满足$\begin{cases}x+3\geqslant y,\\x+y\leqslant 3,\\x\leqslant 2y,\end{cases}$则 $z=2x+y$ 的最大值为________.

14. 环境指数是“宜居城市”评比的重要指标，根据以下环境指数的数据，对名列前 20 名的“宜居城市”的环境指数进行分组统计，结果如下表所示，先从环境指数在[4,5)和[7,8)内的“宜居城市”中随机抽取 2 个城市进行调研，则恰有 1 个城市的环境指数在[7,8)内的概率为________.

组号	1	2	3	4
分组	[4,5)	[5,6)	[6,7)	[7,8)
频数	2	7	8	3

15. 如图，在三棱锥 $A\text{-}BCD$ 中，$BC=CD=BD=2\sqrt{2}$，$AB=AC=AD=2a$，若该三棱锥的侧面积是底面积的 $\sqrt{3}$ 倍，则该三棱锥外接球的表面积为________.



16. 已知函数 $f(x)=\frac{\ln x-1}{x}$，下列命题中：

①$f(x)$在其定义域内有且仅有 1 个零点；

②$f(x)$在其定义域内有且仅有 1 个极值点；

③$\exists x_1,x_2\in(0,+\infty)$，使得 $f(x_1)=f(x_2)$；

④$\forall x_1\in(0,+\infty)$，$\exists x_2\in(0,+\infty)$，使得 $f(x_1)<f(x_2)$；

⑤当 $x>1$ 时，函数 $y=f(x)$的图象总在函数 $y=1-\frac{2}{x}$的图象的下方.

其中真命题有________.(写出所有真命题的序号)

三、解答题(共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17～21 题为必考题,每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答)

(一)必考题(共 60 分)

17.(12 分)在△ABC 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,已知 $b\sin A=\sqrt{3}a\cos B$,$\sin C=4\sin A$.

(1)求 B;

(2)在△ABC 的边 AC 上存在一点 D 满足 $AD=4CD$,连接 BD,若△BCD 的面积为$\frac{2\sqrt{3}}{5}$,求 b.

18.(12 分)某数学兴趣小组为了探究参与某项老年运动是否与性别有关的问题,对城区 60 岁以上老人进行了随机走访调查.得到的数据如表:

	男性	女性	总计
参与该项老年运动	16	p	x
不参与该项老年运动	44	q	y
总计	60	10	100

从统计数据中分析得出,参与该项老年运动的被调查者中,女性的概率是$\frac{1}{3}$.

(1)求 2×2 列联表中 p,q,x,y 的值;

(2)是否有 90%的把握认为参与该项老年运动与性别有关?

(3)若将参与该项老年运动的老人称为"健康达人",现从参与调查的"健康达人"中按性别采用分层抽样的方法抽取 6 人,再从这 6 人中随机抽取 2 人进行健康状况跟踪调查,那么被跟踪调查的 2 人中都是男性的概率是多少?

参考公式及数据:$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19.(12 分)点 E,F 分别是正方形 $ABCD$ 的边 AB,BC 的中点,点 M 在边 AB 上,且 $AB=3AM$,沿图 1 中的虚线 DE,EF,FD 将△ADE,△BEF,△CDF 折起使 A,B,C 三点重合,重合后的点记为点 P,如图 2.

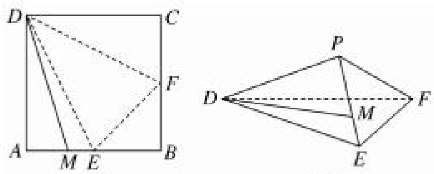


图 1　　图 2

(1)求证:$PF\perp DM$;

(2)若正方形 $ABCD$ 的边长为 6,求点 M 到平面 DEF 的距离.

20.(12 分)已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$经过点 $A\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,且长半轴长为 2.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)设经过点 $B(-1,0)$的直线 l 与椭圆 C 相交于 D,E 两点,点 E 关于 x 轴的对称点为 F,直线 DF 与 x 轴相交于点 G,若$\triangle BEG$ 与$\triangle BDG$ 的面积分别为 S_1,S_2,求$|S_1-S_2|$的最大值.

21.(12 分)已知函数 $f(x)=(m-\ln x)x,x>1$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性;

(2)若 $f(x)-2x-m<0$ 恒成立,求正整数 m 的最大值.

参考数据:$\ln 4\approx1.39,\ln 5\approx1.61$.

(二)选考题(共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分)

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

在平面直角坐标系中,曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\y=t\sin\alpha\end{cases}$($t$ 为参数),以坐标原点 O 为极点,x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta=3$.

(1)求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程;

(2)曲线 C_1 与 C_2 相交于 A,B 两点,求$|OA|\cdot|OB|$的值.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|x|$.

(1)求不等式 $f(x-1)+f(2x-1)\leqslant 2x$ 的解集;

(2)若 $a>0,b>0,c>0$,且$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=1$,证明:$f(x+a)+f(x-b-c)\geqslant 36$.

2021年高考精准备考原创押题卷(一)·数学(文科)参考答案

1. 选 D　由题意，集合 $A=[1,2]$，可得 $B=\{y|y=2x+a, x\in A\}=[a+2,a+4]$，
因为 $A\subseteq B$，所以 $\begin{cases}a+2\leqslant 1,\\ a+4\geqslant 2,\end{cases}$ 解得 $a\in[-2,-1]$. 故选 D.

2. 选 C　$\frac{4i}{1+\sqrt{3}i}=\frac{4i(1-\sqrt{3}i)}{4}=\sqrt{3}+i$，所以虚部为 1. 故选 C.

3. 选 D　x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 的平均数为 4，方差为 2，
则加入 4 后平均数为 $\bar{x}=\frac{1}{6}\times(4\times5+4)=4$.
方差为 $s^2=\frac{1}{6}\times[5\times2+(4-4)^2]=\frac{5}{3}<2$. 故选 D.

4. 选 B　由题意得，$P_0e^{-2k}=0.8P_0$，
所以 $-2k=\ln 0.8$，$k=-\frac{\ln 0.8}{2}$，故 $P=P_0e^{\frac{\ln 0.8}{2}t}=P_0(0.8)^{\frac{t}{2}}$.
若污染物减少 50%，则 $P_0(0.8)^{\frac{t}{2}}=0.5P_0$，
可得 $\frac{t}{2}=\log_{0.8}0.5=\frac{\ln 0.5}{\ln 0.8}=\frac{\ln\frac{1}{2}}{\ln\frac{4}{5}}=\frac{-\ln 2}{2\ln 2-\ln 5}=\frac{\ln 2}{\ln 5-2\ln 2}\approx\frac{0.69}{1.61-2\times0.69}=3$，
故 $t=6$，故选 B.

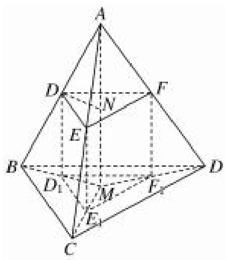
5. 选 C　由已知得抛物线的焦点为 $F(1,0)$，准线方程是 $x=-1$，$A(-1,0)$，
设 $M(x,y)$，则由 $|MA|=\sqrt{2}|MF|$，
得 $\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{2}(x+1)$，又 $y^2=4x$，
所以 $(x+1)^2+4x=2(x+1)^2$，解得 $x=1$.
$|MF|=1+1=2$，故选 C.

6. 选 B　$\because \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DC}=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=1\times2\times\cos\angle BAD+\frac{1}{2}\times4=3$，
$\therefore \cos\angle BAD=\frac{1}{2}$，又 $\angle BAD\in(0,\pi)$，$\therefore \angle BAD=\frac{\pi}{3}$.
故选 B.

7. 选 B　$\because a_1=19, a_{n+1}-a_n=-3$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 19 为首项，-3 为公差的等差数列.
$\therefore a_n=19+(n-1)\times(-3)=22-3n$，则数列 $\{a_n\}$ 是单调递减数列.
设 $\{a_n\}$ 的前 k 项和最大，则有 $\begin{cases}a_k\geqslant 0,\\ a_{k+1}\leqslant 0,\end{cases}$
即 $\begin{cases}22-3k\geqslant 0,\\ 22-3(k+1)\leqslant 0,\end{cases}$ $\therefore \frac{19}{3}\leqslant k\leqslant\frac{22}{3}$，
$\because k\in\mathbf{N}^*$，$\therefore k=7$，$\therefore$ 满足条件的 n 的值为 7. 故选 B.

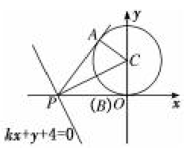
8. 选 A　因为 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\theta+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$，
又 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$，
所以 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3}{5}$，则 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{4}{3}$，
所以 $\tan\theta=\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{-\frac{4}{3}-1}{1-\frac{4}{3}}=7$.
故选 A.

9. 选 A　如图，正四面体 A-BCD 的内接正三棱柱 DEF-$D_1E_1F_1$，且 D,E,F 三个顶点必在四面体的三条棱上，才能使得三棱柱体积最大，正四面体 A-BCD 的棱长为 6，则高为 $AM=\sqrt{6^2-\left(\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times6\right)^2}=2\sqrt{6}$，



设正三棱柱高为 h，底面边长为 a，
因为平面 DEF∥平面 BCD，
所以 $\frac{a}{6}=\frac{2\sqrt{6}-h}{2\sqrt{6}}$，则 $a=\frac{\sqrt{6}}{2}(2\sqrt{6}-h)$，
故 $S_{\triangle DEF}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{6}{4}(2\sqrt{6}-h)^2=\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot(2\sqrt{6}-h)^2$，
所以 $V_{DEF-D_1E_1F_1}=S_{\triangle DEF}\cdot h=\frac{3\sqrt{3}}{8}h(2\sqrt{6}-h)^2=\frac{3\sqrt{3}}{16}\times2h\times(2\sqrt{6}-h)\times(2\sqrt{6}-h)\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{16}\times\left(\frac{2h+2\sqrt{6}-h+2\sqrt{6}-h}{3}\right)^3=8\sqrt{2}$.
当且仅当 $2h=2\sqrt{6}-h$，即 $h=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 时等号成立.
故选 A.

10. 选 D　如图所示，由切线长定理可得 $PA=PB$，又 $AC=BC$，$PC=PC$，且 $\angle PAC=\angle PBC=90°$，
$\therefore \mathrm{Rt}\triangle PAC\cong\mathrm{Rt}\triangle PBC$，



$\therefore$ 四边形 $PACB$ 的面积为 $\triangle PAC$ 面积的两倍. 由题意知圆 C 的标准方程为 $x^2+(y-1)^2=1$，圆心为 $C(0,1)$，半径为 $r=1$，$\because$ 四边形 $PACB$ 的最小面积是 2，
$\therefore \triangle PAC$ 面积的最小值为 1，又 $S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}|PA|\cdot|AC|=\frac{1}{2}|PA|\geqslant 1$，$\therefore |PA|_{\min}=2$.
由勾股定理得 $|PC|=\sqrt{|PA|^2+r^2}=\sqrt{|PA|^2+1}\geqslant\sqrt{5}$，
当直线 PC 与直线 $kx+y+4=0(k>0)$ 垂直时，$|PC|$ 取最小值 $\sqrt{5}$，即 $|PC|_{\min}=\frac{|1+4|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{5}$，整理得 $k^2=4$，
$\because k>0$，解得 $k=2$. 故选 D.

11. 选 B　由 $|AF_1|:|AB|=3:4$，可设 $|AF_1|=3m$，$|AB|=4m$，又 F_2 是 AB 的一个四等分点，

若 $|BF_2|=\frac{1}{4}|AB|$，则 $|BF_2|=m$，$|AF_2|=3m$，但此时 $|AF_1|-|AF_2|=3m-3m=0$，再由双曲线的定义，得 $|AF_1|-|AF_2|=2a$，得到 $a=0$，这与 $a>0$ 矛盾；

若 $|AF_2|=\frac{1}{4}|AB|$，则 $|AF_2|=m$，$|BF_2|=3m$，由双曲线的定义，

得 $\begin{cases}|AF_1|-|AF_2|=2m=2a,\\ |BF_1|-|BF_2|=|BF_1|-3m=2a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=a,\\ |BF_1|=5a.\end{cases}$

则此时满足 $|AF_1|^2+|AB|^2=|BF_1|^2$.

所以 $\triangle ABF_1$ 是直角三角形，且 $\angle BAF_1=90°$.

所以由勾股定理，得 $|AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2\Rightarrow(3a)^2+a^2=(2c)^2$，得 $e=\frac{\sqrt{10}}{2}$. 故选 B.

12. 选 D　令 $f(x)=(4\ 012-x)\ln x$，则 $f'(x)=-\ln x+\frac{4\ 042}{x}-1$. 从而 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

且 $f'(2\ 020)=-\ln 2\ 020+\frac{4\ 042}{2\ 020}-1<0$，

因此 $f'(x)<0$ 对 $\forall x\in(2\ 020,+\infty)$ 恒成立，

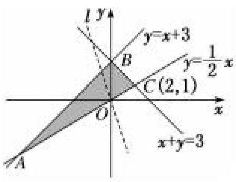
所以 $f(x)$ 在 $(2\ 020,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(2\ 020)>f(2\ 021)>f(2\ 022)$，

即 $2\ 022\ln 2\ 020>2\ 021\ln 2\ 021>2\ 020\ln 2\ 022$. 故选 D.

13. **解析**：作出不等式组

$\begin{cases}x+3\geqslant y,\\ x+y\leqslant 3,\\ x\leqslant 2y\end{cases}$ 所表示的平面区域



如图中阴影部分所示.

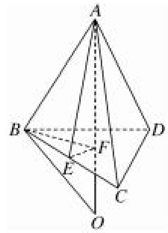
作出直线 $l:y=-2x$，并进行平移，观察可知，当直线 l 过点 $C(2,1)$ 时，z 有最大值为 5.

答案：5

14. **解析**：环境指数在 $[4,5)$ 内的"宜居城市"记为 A_1，A_2，环境指数在 $[7,8)$ 内的"宜居城市"记为 B_1，B_2，B_3，则从环境指数在 $[4,5)$ 和 $[7,8)$ 内的"宜居城市"中随机抽取 2 个城市的所有基本事件有 (A_1,A_2)，(A_1,B_1)，(A_1,B_2)，(A_1,B_3)，(A_2,B_1)，(A_2,B_2)，(A_2,B_3)，(B_1,B_2)，(B_1,B_3)，(B_2,B_3)，共 10 个，其中恰有 1 个城市的环境指数在 $[7,8)$ 内的基本事件有 (A_1,B_1)，(A_1,B_2)，(A_1,B_3)，(A_2,B_1)，(A_2,B_2)，(A_2,B_3)，共 6 个，所以所求概率为 $P=\frac{3}{5}$.

答案：$\frac{3}{5}$

15. **解析**：如图，取 BC 边的中点 E，$\triangle BCD$ 外接圆的圆心为 F，三棱锥 A-BCD 外接球球心为 O. 因为 $AB=AC$，且点 E 为 BC 的中点，所以 $AE=\sqrt{4a^2-2}$，由此可知三棱锥 A-BCD 的侧面积 $S_{侧}=3\times\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{4a^2-2}=6\sqrt{2a^2-1}$，



又底面 $\triangle BCD$ 的面积为 $2\sqrt{3}$，

所以 $6\sqrt{2a^2-1}=\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}$，解得 $a=1$(舍负).

设三棱锥 A-BCD 外接球的半径为 R，$OF=x$.

因为 $AB=AC=AD=2$，

所以点 A 在底面 BCD 上的射影为点 F.

因为 $AB<BC$，

所以三棱锥外接球球心 O 在直线 AF 的延长线上.

由 BF 为 $\triangle BCD$ 外接圆的半径，可得 $BF=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

在 $Rt\triangle ABF$ 中，由勾股定理可得 $(R-x)^2+\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2=4$，①

在 $Rt\triangle OBF$ 中，由勾股定理可得 $x^2+\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2=R^2$，②

联立①②，解得 $R=\sqrt{3}$，$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以外接球的表面积 $S=4\pi R^2=12\pi$.

答案：12π

16. **解析**：$f'(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$，$x>0$，令 $f'(x)=0$，有 $x=e^2$，

$0<x<e^2$ 时，$f'(x)>0$；$x>e^2$ 时，$f'(x)<0$，

$f(e^2)=e^{-2}>0$，又 $x>e$ 时，$f(x)>0$，而 $f(e)=0$，故 $f(x)$ 有且只有一个零点，①正确；

导数为 0 的点附近的导数值符号不同，故 e^2 为极值点，②正确；

令 $h(x)=f(x)-\frac{1}{2}e^{-2}$，由上面分析知，$h(x)$ 在 (e,e^2) 上必有一个零点，又 $h(e^3)=\frac{4-e}{2e^3}>0$，

$h(e^4)=\frac{6-e^2}{2e^4}<0$，故 $h(x)$ 在 (e^3,e^4) 上有另一个零点，

所以 $\exists x_1,x_2\in(0,+\infty)$，使 $h(x_1)=h(x_2)=0$，

即 $f(x_1)=f(x_2)=\frac{1}{2}e^{-2}$，③正确；

取 $x_1=e^2$，$f(e^2)$ 为极大值也为最大值，故不存在 x_2 使得 $f(x_1)<f(x_2)$，④错误；

令 $g(x)=1-\frac{2}{x}-\frac{\ln x-1}{x}=1-\frac{\ln x+1}{x}$，

则 $g'(x)=\frac{\ln x}{x^2}$，当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)>g(1)=0$，即 $x>1$ 时，$1-\frac{2}{x}>\frac{\ln x-1}{x}$，函数 $y=f(x)$ 的图象在函数 $y=1-\frac{2}{x}$ 的图象的下方，⑤正确.

答案：①②③⑤

17. **解**：(1) ∵ $b\sin A=\sqrt{3}a\cos B$，

∴ $\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin A\cos B$，…………2 分

∵ A 为三角形的内角，∴ $\sin A\neq 0$，

∴ $\tan B=\sqrt{3}$，…………1 分

∵ $B\in(0,\pi)$，∴ $B=\frac{\pi}{3}$. …………6 分

(2) 依题意可知，$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{AC}{DC}=\frac{5}{1}$.

∵ $\triangle BCD$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{3}}{5}$，

∴ $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$，…………8 分

∵ $\triangle ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=2\sqrt{3}$，

∴ $ac=8$，

∵ $\sin C=4\sin A$，∴ $c=4a$，可得 $a=\sqrt{2}$，$c=4\sqrt{2}$，

…………10 分

∴ $b=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos B}=\sqrt{26}$. …………12 分

18. **解**：(1) 由题意得 $\frac{p}{p+16}=\frac{1}{3}$，解得 $p=8$，所以 $q=40-8=32$，所以 $x=16+8=24$，$y=44+32=76$. …………3 分

(2) 由列联表中的数据可得 K^2 的观测值

$K^2=\frac{100\times(16\times 32-8\times 44)^2}{60\times 40\times 24\times 76}\approx 0.585<2.706$，…………5 分

所以没有 90% 的把握认为参与该项老年运动与性别有关. …………6 分

(3) 由 (1) 得"健康达人"共有 24 人，其中男性 16 人，女性 8 人，所以抽样比 $k=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$.

因此按性别分层抽样抽取的 6 人中有男性 $16\times\frac{1}{4}=4$ 人，记为 A_1,A_2,A_3,A_4，

女性 $8\times\frac{1}{4}=2$ 人，记为 B_1,B_2，…………8 分

从这 6 人中抽取 2 人的所有方式有 (A_1,A_2)，(A_1,A_3)，(A_1,A_4)，(A_1,B_1)，(A_1,B_2)，(A_2,A_3)，(A_2,A_4)，(A_2,B_1)，(A_2,B_2)，(A_3,A_4)，(A_3,B_1)，(A_3,B_2)，(A_4,B_1)，(A_4,B_2)，(B_1,B_2)，共 15 种情况，…………10 分

其中符合题目要求的有 6 种情况，

所以被跟踪调查的全是男性的概率 $P=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$. …………12 分

19. **解**：(1) 证明：因为四边形 $ABCD$ 是正方形，

所以折起后有 $PD\perp PF$，$PE\perp PF$. …………2 分

又 $PD\cap PE=P$，$PD\subset$ 平面 PDE，$PE\subset$ 平面 PDE，

所以 $PF\perp$ 平面 PDE. …………4 分

又 $DM\subset$ 平面 PDE，

所以 $PF\perp DM$. …………6 分

(2) 设点 P 到平面 DEF 的距离为 h，

因为点 E 为 AB 的中点，且 $AB=3AM$，所以 $2AE=3(AE-ME)$，可得 $AE=3ME$，即 $PE=3ME$，

所以点 M 到平面 DEF 的距离为 $\frac{h}{3}$.

又 PD，PE，PF 两两垂直，

所以 $PD\perp$ 平面 PEF.

因为 $S_{\triangle PEF}=\frac{1}{2}\times 3\times 3=\frac{9}{2}$，$PD=6$，

所以 $V_{D\text{-}PEF}=\frac{1}{3}\times\frac{9}{2}\times 6=9$. …………8 分

由题意得，$S_{\triangle ADE}=S_{\triangle CDF}=\frac{1}{2}\times 6\times 3=9$，

而 $S_{\triangle DEF}=S_{\text{正方形}ABCD}-S_{\triangle BEF}-S_{\triangle ADE}-S_{\triangle CDF}=36-\frac{9}{2}-9-9=\frac{27}{2}$，…………9 分

所以 $V_{D\text{-}PEF}=V_{P\text{-}DEF}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle DEF}\cdot h=\frac{1}{3}\times\frac{27}{2}\times h=9$，

解得 $h=2$，…………11 分

所以 $\frac{h}{3}=\frac{2}{3}$，故点 M 到平面 DEF 的距离为 $\frac{2}{3}$.

…………12 分

20. **解**：(1) 由已知，得 $a=2$.

∴ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$，

∵ 椭圆 C 经过点 $A\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

∴ $\frac{1}{4}+\frac{3}{4b^2}=1$，解得 $b^2=1$，

∴ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …………4 分

(2) 由题意，知直线 l 的斜率存在且不为 0，设直线 l 的方程为 $x=ty-1(t\neq 0)$，$D(x_1,y_1)$，$E(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}x=ty-1,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 x 得 $(t^2+4)y^2-2ty-3=0$.

∵ $\Delta=4t^2+12(t^2+4)=16t^2+48>0$，

∴ $y_1+y_2=\frac{2t}{t^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{3}{t^2+4}$. …………6 分

∵ F 为点 E 关于 x 轴的对称点，∴ $F(x_2,-y_2)$.

∴ 直线 DF 的方程为 $y-y_1=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$，

即 $y-y_1=\frac{y_1+y_2}{t(y_1-y_2)}(x-x_1)$.

令 $y=0$，则 $x=x_1+\dfrac{-ty_1^2+ty_1y_2}{y_1+y_2}$

$=\dfrac{(ty_1-1)(y_1+y_2)-ty_1^2+ty_1y_2}{y_1+y_2}$

$=\dfrac{2ty_1y_2-(y_1+y_2)}{y_1+y_2}=2t\cdot\left(-\dfrac{3}{2t}\right)-1=-4$，……8 分

$\therefore G(-4,0)$，从而 $|BG|=3$，

$\therefore |S_1-S_2|=\dfrac{1}{2}|BG|\cdot|y_1+y_2|$

$=\dfrac{3}{2}|y_1+y_2|=\dfrac{3|t|}{t^2+4}$……10 分

$=\dfrac{3}{|t|+\dfrac{4}{|t|}}\leqslant\dfrac{3}{2\sqrt{|t|\cdot\dfrac{4}{|t|}}}=\dfrac{3}{4}$.

$\therefore$ 当且仅当 $|t|=\dfrac{4}{|t|}$，即 $t=\pm2$ 时，$|S_1-S_2|$ 取得最大值 $\dfrac{3}{4}$. ……12 分

21. **解**：(1) $f'(x)=m-1-\ln x$，因为 $x>1$，所以 $\ln x>0$. ……1 分

当 $m-1\leqslant0$，即 $m\leqslant1$ 时，$f'(x)<0$ 对 $x>1$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减. ……2 分

当 $m-1>0$，即 $m>1$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=e^{m-1}$，

由 $f'(x)>0$，解得 $1<x<e^{m-1}$；

由 $f'(x)<0$，解得 $x>e^{m-1}$.

所以 $f(x)$ 在 $(1,e^{m-1})$ 上单调递增，在 $(e^{m-1},+\infty)$ 上单调递减. ……4 分

综上所述，当 $m\leqslant1$ 时，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减；

当 $m>1$ 时，$f(x)$ 在 $(1,e^{m-1})$ 上单调递增，在 $(e^{m-1},+\infty)$ 上单调递减. ……5 分

(2) $x>1$ 时，$f(x)-2x-m<0$ 恒成立，即 $m<\dfrac{x\ln x+2x}{x-1}$ 对 $x>1$ 恒成立. ……6 分

令 $h(x)=\dfrac{x\ln x+2x}{x-1}$，则 $h'(x)=\dfrac{x-\ln x-3}{(x-1)^2}$.

令 $g(x)=x-\ln x-3$，则 $g'(x)=1-\dfrac{1}{x}$，

因为 $x>1$，所以 $g'(x)=1-\dfrac{1}{x}>0$，

故当 $x>1$ 时，$g(x)$ 是增函数，

因为 $g(4)=4-\ln 4-3=1-\ln 4\approx1-1.39=-0.39<0$，

$g(5)=5-\ln 5-3=2-\ln 5\approx2-1.61=0.39>0$，

所以 $\exists x_1\in(4,5)$，使 $g(x_1)=0$，

由 $g(x_1)=x_1-\ln x_1-3=0$，得 $\ln x_1=x_1-3$. ……8 分

当 $x\in(1,x_1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增. ……9 分

所以当 $x=x_1$ 时，$h(x)$ 取得最小值，为 $h(x_1)$，

所以 $m<h(x_1)=\dfrac{x_1\ln x_1+2x_1}{x_1-1}=\dfrac{x_1^2-x_1}{x_1-1}=x_1$，……11 分

由 $x_1\in(4,5)$，且 m 为正整数，得 $m\leqslant4$，所以正整数 m 的最大值为 4. ……12 分

22. **解**：(1) 曲线 C_1 的普通方程为 $\cos\alpha\cdot y-\sin\alpha\cdot x=0$，

即极坐标方程为 $\theta=\alpha(\rho\in\mathbf{R})$. ……3 分

曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x=3$，

即 $(x-1)^2+y^2=4$. ……5 分

(2) 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2-2\cos\theta\cdot\rho-3=0$，代入 $\theta=\alpha$，

可得 $\rho_1\cdot\rho_2=-3$，……8 分

则 $|OA|\cdot|OB|=|\rho_1\rho_2|=3$. ……10 分

23. **解**：(1) $f(x-1)+f(2x-1)=|x-1|+|2x-1|$. ……1 分

当 $x>1$ 时，$|x-1|+|2x-1|=x-1+2x-1=3x-2\leqslant2x$，则 $x\leqslant2$，所以 $1<x\leqslant2$；

当 $\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant1$ 时，$|x-1|+|2x-1|=1-x+2x-1=x\leqslant2x$，则 $x\geqslant0$，所以 $\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant1$；

当 $x<\dfrac{1}{2}$ 时，$|x-1|+|2x-1|=1-x+1-2x=2-3x\leqslant2x$，则 $x\geqslant\dfrac{2}{5}$，所以 $\dfrac{2}{5}\leqslant x<\dfrac{1}{2}$. ……4 分

综上，不等式 $f(x-1)+f(2x-1)\leqslant2x$ 的解集为 $\left\{x\left|\dfrac{2}{5}\leqslant x\leqslant2\right.\right\}$. ……5 分

(2) 证明：由绝对值不等式的性质可得，

$f(x+a)+f(x-b-c)=|x+a|+|x-b-c|\geqslant|(x+a)-(x-b-c)|=a+b+c$，……7 分

因为 $a>0,b>0,c>0$，且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{9}{c}=1$，所以 $a+b+c=(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{9}{c}\right)$

$=1+4+9+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{4a}{b}+\dfrac{4c}{b}+\dfrac{9a}{c}+\dfrac{9b}{c}\geqslant14+2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{4a}{b}}+2\sqrt{\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{9a}{c}}+2\sqrt{\dfrac{4c}{b}\cdot\dfrac{9b}{c}}=36$，

当且仅当 $b=2a$，$c=3a$ 时，等号成立，

故 $f(x+a)+f(x-b-c)\geqslant36$. ……10 分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ″ 专业、专注、有态度 ″ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。