

姓名\_\_\_\_\_ 准考证号\_\_\_\_\_

(在此卷上答题无效)

绝密★启用前

三湘名校教育联盟·2021届高三第二次大联考

## 数 学

命题:天壹名校联盟命题组

审题:长沙市一中 龚日辉 永州一中 眭小军

本试卷共4页。全卷满分150分,考试时间120分钟。

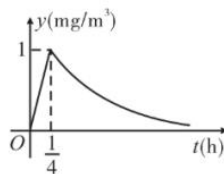
注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x | \log_2 x < 1\}$ ,  $B = \{x | x < 1\}$ , 则  $A \cap B =$   
 A.  $\{x | x < 1\}$       B.  $\{x | x < 2\}$       C.  $\{x | 0 < x < 1\}$       D.  $\{x | 0 < x < 2\}$
2. 已知  $a, b$  是实数,复数  $z = a + bi$ , 若  $a + i = \frac{bi}{1+i}$ , 则  $\bar{z}$  在复平面内对应的点位于  
 A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限
3. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{5} = 1 (a > 0)$  的一个焦点为  $(-3, 0)$ , 则其渐近线方程为  
 A.  $y = \pm \frac{5}{4}x$       B.  $y = \pm \frac{4}{5}x$       C.  $y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}x$       D.  $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$
4. 设  $m, n$  是两条不同的直线,  $\alpha, \beta$  是两个不同的平面, 则下列命题正确的是  
 A. 若  $\alpha \perp \beta, m \perp n, m \perp \alpha$ , 则  $n \perp \beta$       B. 若  $\alpha \perp \beta, m \perp n, m \parallel \alpha$ , 则  $n \parallel \beta$   
 C. 若  $\alpha \perp \beta, m \perp \alpha, n \perp \beta$ , 则  $m \perp n$       D. 若  $\alpha \perp \beta, m \parallel \alpha, n \parallel \beta$ , 则  $m \perp n$

5. 为了抗击新型冠状病毒肺炎,保障师生安全,学校决定每天对教室进行消毒工作,已知药物释放过程中,室内空气中的含药量  $y(\text{mg}/\text{m}^3)$  与时间  $t(\text{h})$  成正比( $0 < t < \frac{1}{4}$ );药物释放完毕后,  $y$  与  $t$  的函数关系式为  $y = (\frac{1}{4})^{t-a}$  ( $a$  为常数,  $t \geq \frac{1}{4}$ ), 据测定,当空气中每立方米的含药量降低到  $0.5(\text{mg}/\text{m}^3)$  以下



时,学生方可进教室,则学校应安排工作人员至少提前( )分钟进行消毒工作

- A. 25      B. 30      C. 45      D. 60

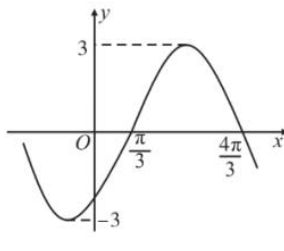
【高三数学试题·第1页(共4页)】

6. 已知实数  $a > 1, b > 1$ , 则“ $a + b \leq 4$ ”是“ $\log_2 a \cdot \log_2 b \leq 1$ ”的
- A. 充分不必要条件    B. 必要不充分条件  
C. 充要条件    D. 既不充分也不必要条件
7. 孙子定理是中国古代求解一次同余式组的方法, 是数论中一个重要定理, 最早可见于中国南北朝时期的数学著作《孙子算经》, 1852 年英国来华传教士伟烈亚力将其问题的解法传至欧洲, 1874 年英国数学家马西森指出此法符合 1801 年由高斯得出的关于同余式解法的一般性定理, 因而西方称之为“中国剩余定理”. 这个定理讲的是一个关于整除的问题, 现有这样一个整除问题: 将 2 至 2021 这 2020 个整数中能被 3 除余 2 且被 4 除余 1 的数按由小到大的顺序排成一列构成一数列, 则此数列的项数是
- A. 168    B. 169    C. 170    D. 171
8. 已知函数  $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$ , 设  $a = f(\log_2 \frac{1}{6}), b = f(\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}), c = f(2^{0.3})$ , 则
- A.  $a < b < c$     B.  $a < c < b$     C.  $b < a < c$     D.  $c < a < b$

**二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 3 分, 有选错的得 0 分。**

9. 已知向量  $a, b$  满足  $|a| = 1, |b| = 2, |a + b| = \sqrt{3}$ , 则下列结论中正确的是
- A.  $a \cdot b = -2$     B.  $a \perp (a + b)$     C.  $|a - b| = \sqrt{7}$     D.  $a$  与  $b$  的夹角为  $\frac{\pi}{3}$
10. 若样本  $a + x_1, a + x_2, \dots, a + x_n$  的平均值是 5, 方差是 4, 样本  $1 + 2x_1, 1 + 2x_2, \dots, 1 + 2x_n$  的平均值是 9, 标准差是  $s$ , 则下列结论正确的是
- A.  $a = 1$     B.  $a = 2$     C.  $s = 2$     D.  $s = 4$

11. 已知函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图像如图所示, 将函数  $y = f(x)$  的图像上所有点的横坐标缩短为原来的  $\frac{1}{4}$  倍, 纵坐标不变, 再将所得图像上所有点向右平移  $\theta$  ( $\theta > 0$ ) 个单位长度, 得到函数  $g(x)$  的图像, 且  $y = g(x)$  的图像关于直线  $x = \frac{\pi}{2}$  对称, 则



- 下列结论中正确的是
- A.  $\omega = 1$     B.  $\varphi = -\frac{\pi}{3}$   
C.  $g(x) = 3 \sin(4x - 4\theta - \frac{\pi}{3})$                                       D.  $\theta$  的最小值为  $\frac{\pi}{12}$
12. 设  $m \in \mathbf{R}$ , 过定点  $M$  的直线  $l_1: mx - y - 3m + 1 = 0$  与过定点  $N$  的直线  $l_2: x + my - 3m - 1 = 0$  相交于点  $P$ , 线段  $AB$  是圆  $C: (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$  的一条动弦, 且  $|AB| = 2\sqrt{2}$ , 则下列结论中正确的是
- A.  $l_1$  一定垂直  $l_2$     B.  $|PM| + |PN|$  的最大值为  $4\sqrt{2}$   
C. 点  $P$  的轨迹方程为  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$               D.  $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$  的最小值为  $2\sqrt{2}$

**三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。**

13.  $(\frac{2}{\sqrt{x}} - x^2)^5$  的展开式中  $x^5$  的系数是\_\_\_\_\_.

14. 若函数  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  与  $g(x) = e^{x-a} - b$  的图像在  $x = 1$  处有相同的切线, 则  $a + b =$  \_\_\_\_\_.

15. 已知抛物线  $y^2 = 8x$  的焦点为  $F$ , 准线与  $x$  轴交于点  $E$ ,  $A$  是抛物线上一点,  $AE \perp AF$ , 则  $|AF| =$  \_\_\_\_\_.

16. 边长为  $2\sqrt{3}$  的正方形  $ABCD$  的顶点均在表面积为  $28\pi$  的球  $O$  的球面上,  $O_1$  为正方形  $ABCD$  的中心,  $\triangle O_1AB$  绕  $AB$  旋转, 其顶点  $O_1$  接触到球面时设为  $E$ , 则二面角  $E-AB-D$  的大小为 \_\_\_\_\_.

四、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在①  $(a+c)(\sin A - \sin C) = b(\sin A - \sin B)$ ; ②  $\frac{2b-a}{c} - \frac{\cos A}{\cos C} = 0$ ; ③ 向量  $m = (c, \sqrt{3}b)$  与  $n = (\cos C, \sin B)$  平行, 这三个条件中任选一个, 补充在下面题干中, 然后解答问题.

已知  $\triangle ABC$  内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且满足 \_\_\_\_\_.

(1) 求角  $C$ ;

(2) 若  $\triangle ABC$  为锐角三角形, 且  $a = 4$ , 求  $\triangle ABC$  面积的取值范围.

(注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分)

18. (12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  满足  $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \dots + \frac{n}{a_n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

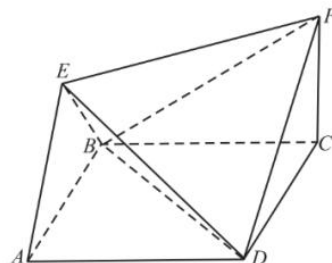
(2) 设  $b_n = \frac{1}{\log_4 a_{n+1} \cdot \log_4 a_n}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

19. (12 分)

如图, 等腰直角  $\triangle ABE$  与正方形  $ABCD$  所在平面互相垂直,  $AE \perp BE$ ,  $AB = 2$ ,  $FC \perp$  平面  $ABCD$ ,  $EF \parallel$  平面  $ABCD$ .

(1) 求  $FC$  的长;

(2) 求直线  $EF$  与平面  $BDF$  所成角的正弦值.



20. (12 分)

甲、乙、丙三人进行乒乓球挑战赛(其中两人比赛,另一人当裁判,每局结束时,负方在下一局当裁判),设在情况对等中各局比赛双方获胜的概率均为 $\frac{1}{2}$ ,但每局比赛结束时,胜的一方和裁判一方下一局比赛时受体力影响,胜的概率均降为 $\frac{2}{5}$ ,第一局甲当裁判.

- (1)求第三局甲当裁判的概率;
- (2)设  $X$  表示前 4 局乙当裁判次数,求  $X$  的分布列和数学期望.

21. (12 分)

已知椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  过点  $C(-2,0), D(2,0)$ , 且离心率为 $\frac{1}{2}$ .

- (1)求椭圆  $\Gamma$  的方程;
- (2)设  $E, F, P$  是椭圆  $\Gamma$  上的三点,  $O$  为坐标原点,  $OE \parallel PC, OF \parallel PD$ , 证明:  $\triangle OEF$  的面积为定值.

22. (12 分)

已知函数  $f(x) = ae^x - \ln(x+1) + \ln a - 1$ .

- (1)若  $a=1$ , 求函数  $f(x)$  的极值;
- (2)若函数  $f(x)$  有且仅有两个零点, 求  $a$  的取值范围.

## 关于我们

**自主选拔在线**（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承“专业、专注、有态度”的创办公念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。



微信搜一搜



自主选拔在线