

中学生标准学术能力诊断性测试 2018 年 3 月测试

数学理科试卷

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

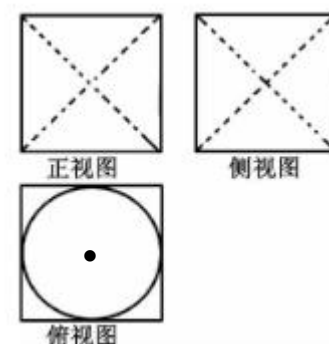
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x | \log_2 x \leq 1\}$ ， $B = \{x | x^2 + x - 2 \geq 0\}$ ，则 $A \cap C_U B =$
- A. $(0, 1]$ B. $(-2, 2]$
C. $(0, 1)$ D. $[-2, 2]$
2. “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - \pi x \geq 0$ ” 的否定是
- A. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - \pi x < 0$ B. $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 - \pi x \leq 0$
C. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - \pi x_0 \leq 0$ D. $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - \pi x_0 < 0$
3. 某高铁分别在 7:30, 8:00, 8:30 发车，甲在 7:50 至 8:30 之间到达高铁站，且到达车站的时刻是随机的，则甲等车时间不超过 15 分钟的概率是
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{3}{8}$
C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{8}$
4. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_5 + a_8 + a_{11} = 12$ ，则 S_{15} 等于
- A. 60 B. 62
C. 64 D. 66
5. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ， $f(-2) = 2018$ ，对任意的 $x \in \mathbf{R}$ ，都有 $f'(x) < 2x$ 成立，则不等式 $f(x) < x^2 + 2014$ 的解集为
- A. $(-\infty, -2)$ B. $(-2, 2)$
C. $(-2, +\infty)$ D. \mathbf{R}

6. 二项式 $(2x^4 - \frac{1}{3x^3})^n$ 的展开式中含有非零常数项，则正整数 n 的最小值
- A. 8 B. 7 C. 6 D. 5

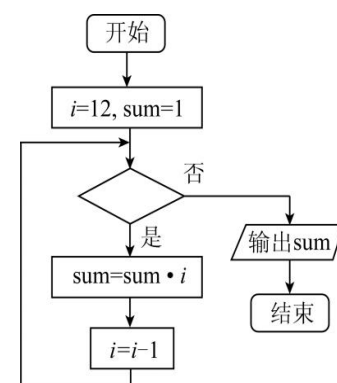
7. 一个几何体的三视图如图所示，图中的三个正方形的边长均为 2，则该几何体的体积为

- A. $8 - \frac{2\pi}{3}$
B. $4 - \frac{\pi}{3}$
C. $8 - \frac{\pi}{3}$
D. $4 - \frac{2\pi}{3}$



8. 如右图所示的程序输出结果为 11880，则判断框中应填

- A. $i \leq 9?$
B. $i \geq 8?$
C. $i \geq 9?$
D. $i \leq 8?$



9. 已知函数 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x (x \in \mathbf{R})$ ，先将 $y = f(x)$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{3}$ (纵坐标不变)，再将得到的图象上所有点向右平移 $\theta (\theta > 0)$ 个单位长度，得到的图象关于 y 轴对称，则 θ 的最小值为

- A. $\frac{\pi}{9}$ B. $\frac{5\pi}{18}$
C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

10. 过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点 $P(1, 2)$ ，作两条直线分别交抛物线于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，当 PA 与 PB 的斜率存在且倾斜角互补时，则求 $y_1 + y_2$ 值为

- A. -2 B. -3 C. -4 D. -5

11. 设函数 $f(x) = \min \left\{ x \ln x, \frac{x^2}{e^x} \right\}$ ($\min \{a, b\}$ 表示 a, b 中的较小者)，则函数 $f(x)$ 的最大值为

- A. $\frac{3}{2} \ln 2$ B. $2 \ln 2$ C. $\frac{1}{e}$ D. $\frac{4}{e^2}$

12. 已知下列命题：

- ① 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2, \sigma^2)$ ， $P(\xi \leq 4) = 0.84$ ，则 $P(\xi \leq 0) = 0.16$ ；
② 若样本数据 x_1, x_2, \dots, x_n 的平均值和方差分别为 16 和 1.44，则数据 $3x_1 - 8, 3x_2 - 8, \dots, 3x_n - 8$ 的平均值和标准差分别为 40，3.6；
③ 两个事件不是互斥事件的必要不充分条件是两个事件不是对立事件；
④ 在 2×2 列联表中，若比值 $\frac{a}{a+b}$ 与 $\frac{c}{c+d}$ 相差越大，则两个分类变量有关

系的可能性就越大。

⑤ 已知 α, β 为两个平面，且 $\alpha \perp \beta$ ， l 为直线。则命题：“若 $l \perp \beta$ 则 $l // \alpha$ ” 的逆命题和否命题均为假命题。

⑥ 设定点 $F_1(0, -1), F_2(0, 1)$ ，动点 P 满足条件 $|PF_1| + |PF_2| = a + \frac{1}{a}$ (a 为正常数)，则 P 的轨迹是椭圆。

其中真命题的个数为

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

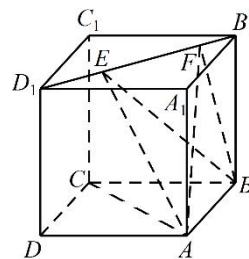
13. 已知平面向量 \vec{a}, \vec{b} 的夹角为 120° ，且 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$ 。若平面向量 \vec{m} 满足 $\vec{m} \cdot \vec{a} = 1, \vec{m} \cdot \vec{b} = 2$ ，则 $|\vec{m}| =$ _____。

14. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y - 6 \leq 0 \\ y \geq \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5} \end{cases}$ ，则 $\frac{(x+2y)^2 - 3y^2}{x^2 + y^2}$ 的取值范围

是 _____。

15. 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 点 P 在双曲线右支上, 若 $|\overline{F_1P}| - \sqrt{3}|\overline{F_2P}| = 0$, 且 $(\overline{OF_1} - \overline{PO}) \cdot \overline{F_1P} = 0$ (其中 O 为坐标原点), 则该双曲线的离心率为_____.

16. 如图, 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 线段 B_1D_1 上有两个动点 E, F , 且 $EF = 1$, 则三棱锥 $E - ABF$ 的体积为_____.



三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

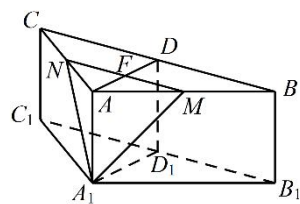
17. (12 分) 已知向量 $\vec{m} = (2 \cos x, \sin x)$, $\vec{n} = (\cos x, 2\sqrt{3} \cos x)$ ($x \in \mathbf{R}$), 设函数 $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n} - 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调减区间;

(2) 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角分别为 A, B, C , 若 $f(A) = 2$, $B = \frac{\pi}{4}$, 边

$AB = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, 求边 BC .

18. (12 分) 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 侧棱 $AA_1 \perp$ 底面 ABC , $AB = AC = 2AA_1$, $\angle BAC = 120^\circ$, D, D_1 分别是线段 BC, B_1C_1 的中点, 过线段 AD 的中点 F 作 BC 的平行线, 分别交 AB, AC 于点 M, N .



(1) 证明: $MN \perp$ 平面 ADD_1A_1 ;

(2) 求锐二面角 $A - A_1M - N$ 的余弦值.

19. (12 分) 2018 年元旦期间, 某品牌轿车销售商为了促销, 给出了两种优惠方案, 顾客只能选择其中的一种, 方案一: 每满 6 万元, 可减 6 千元. 方案二: 金额超过 6 万元(含 6 万元), 可摇号三次, 其规则是依次装有 2 个幸运号、2 个吉祥号的一号摇号机, 装有 2 个幸运号、2 个吉祥号的二号摇号机, 装有 1 个幸运号、3 个吉祥号的三号摇号机各摇号一次, 其优惠情况为: 若摇出 3 个幸运号则打 6 折; 若摇出 2 个幸运号则打 7 折; 若摇出 1 个幸运号则打 8 折; 若没有摇出幸运号则不打折.

(1) 若某型号的车正好 6 万元, 两个顾客都选中第二种方案, 求至少有一名顾客比选择方案一更优惠的概率;

(2) 若你朋友看中一款价格为 10 万的该品牌轿车, 请用所学知识帮助你朋友分析一下应选择哪种付款方案.

20. (12 分) 已知动点 D 与两定点 $A(-2, 0), B(2, 0)$ 连线的斜率的乘积为 $-\frac{1}{2}$, 圆 C 的圆心在原点, 半径为 $\sqrt{2}$.

(1) 若动点 D 的轨迹为曲线 E , 求曲线 E 方程;

(2) 若动点 P 在曲线 E 上, 点 Q 在圆 C 上, 且 P, Q 在 y 轴两侧, 线段 PQ 平行于 x 轴. 直线 AP 交 y 轴于点 M , 直线 BQ 交 y 轴于点 N , 试探究 $\angle MQN$ 是否为定值, 若是, 求出该定值; 若不是定值, 请说明理由.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{m \ln x}{x} + n$, $g(x) = x^2(f(x) - \frac{1}{x} - \frac{a}{2})$

($m, n, a \in \mathbf{R}$), 且曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = x - 1$.

(1) 求实数 m, n 的值及函数 $f(x)$ 的最大值;

(2) 当 $a \in (-e, \frac{1}{e})$ 时, 记函数 $g(x)$ 的最小值为 b , 求实数 b 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = t \\ y = m + t \end{cases}$ (t 为参数,

$m \in \mathbf{R}$), 以原点 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2

的极坐标方程为 $\rho^2 = \frac{3}{3 - 2 \cos^2 \theta} (0 \leq \theta \leq \pi)$.

(1) 写出曲线 C_1 的普通方程和曲线 C_2 的直角坐标方程;

(2) 已知点 P 是曲线 C_2 上一点, 若点 P 到曲线 C_1 的最小距离为 $2\sqrt{2}$, 求 m 的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}|x - a| (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 解不等式 $|x - \frac{1}{3}| + f(x) \geq 1$;

(2) 设不等式 $|x - \frac{1}{3}| + f(x) \leq x$ 的解集为 M , 若 $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] \subseteq M$, 求实数 a 的取值范围.