

2021—2022 学年高中毕业班阶段性测试(一)

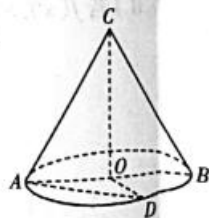
理科数学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集 $U = \{x|x \geq 0\}$, $M = \{x|x - x^2 > 0\}$, $N = \{y|y = 2^x, x \geq 0\}$, 则 $M \cap (\complement_U N) =$
A. $[0, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $[0, 1)$ D. $(0, 1)$
2. 复数 z 满足 $(2+i)z = \bar{z} - 4$, 则 $z =$
A. $3+i$ B. $-3+i$ C. $-1+i$ D. $-1-i$
3. 已知命题 p 是“若 $\tan \alpha = 1$, 则 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ”的否命题, 命题 q 为“ $\exists x \in \mathbf{R}, 2^x < 0$ ”, 则下列命题中, 假命题是
A. $p \vee q$ B. $\neg p \wedge \neg q$ C. $p \vee \neg q$ D. $p \wedge \neg q$
4. 已知非常数函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)f(x) = 1 (x \in \mathbf{R})$, 则下列函数中, 不是奇函数的为
A. $\frac{f(x)-1}{f(x)+1}$ B. $\frac{f(x)+1}{f(x)-1}$ C. $f(x) - \frac{1}{f(x)}$ D. $f(x) + \frac{1}{f(x)}$
5. 若向量 a, b 满足 $|a| = 1, |b| = \sqrt{2}, (2a+b) \perp b$, 则 a, b 的夹角为
A. $\frac{3\pi}{4}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{4}$
6. 已知 $a > 0$, 若 $(x + \frac{9}{x^2})^6$ 与 $(x^2 + \frac{a}{x})^6$ 的展开式中的常数项相等, 则 $a =$
A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. 3 D. 9
7. 如图, 圆锥的底面直径 $AB = 2$, 其侧面展开图为半圆, 底面圆的弦 $AD = \sqrt{3}$, 则异面直线 AD 与 BC 所成的角的余弦值为
A. 0 B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$



8. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为 π , 将其图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后对应的函数为偶函数, 则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) =$

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. 1 D. $\frac{1}{2}$

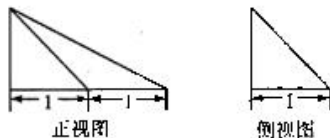
9. 已知抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 F , 过 F 作一条直线与抛物线及抛物线的准线相交, 交点从上到下依次为 A, B, C , 若 $\frac{|BC|}{|BF|} = \sqrt{5}$, 则 $|AB| =$

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

10. 若函数 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\sin(x - 2\pi) - a\cos(\pi - x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, -1]$ B. $(-\infty, \sqrt{2}]$
C. $(1, \sqrt{2}]$ D. $[1, +\infty)$

11. 一个三棱锥与一个四棱锥的正视图与侧视图均是如图所示的图形, 则三棱锥与四棱锥的体积之比的最小值为



- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

12. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 2x}$, 若实数 m, n 满足 $e^{m+n} = 4mn$, 且 $f(m) = -\frac{1}{2}$, 则 $f(n) =$

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{2}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \geq 4, \\ x-y \geq 0, \\ x \leq 4, \end{cases}$ 则 $z = 2x + y$ 的最小值为 _____.

14. 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{m} = 1$ ($m > 0$) 的离心率为 2, 则它的一个焦点到一条渐近线的距离为 _____.

15. 某专业资格考试包含甲、乙、丙 3 个科目, 假设小张甲科目合格的概率为 $\frac{3}{4}$, 乙、丙科目合格的概率相等, 且 3 个科目是否合格相互独立. 设小张 3 科中合格的科目数为 X , 若 $P(X=3) = \frac{3}{16}$, 则 $E(X) =$ _____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $B = \frac{\pi}{3}, a + c = 6$, 则 AC 边上的中线长的取值范围是 _____.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤. 第 17 ~ 21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22, 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

某职业培训学校现有六个专业, 往年每年各专业的招生人数和就业率(直接就业的学生人数与招生人数的比值)统计如下表:

专业	机电维修	艺术舞蹈	汽车美容	餐饮	电脑技术	美容美发
招生人数	100	100	300	200	800	500
就业率	100%	70%	90%	80%	50%	80%

(I) 从该校往年的学生中随机抽取 1 人, 求该生是“餐饮”专业且直接就业的概率;

(II) 为适应人才市场的需求, 该校决定明年将“电脑技术”专业的招生人数减少 m ($0 < m \leq 400$), 将“机电维修”专业的招生人数增加 $\frac{m}{3}$, 假设“电脑技术”专业的直接就业人数不变, “机电维修”专业的就业率不变, 其他专业的招生人数和就业率都不变, 要使招生人数调整后全校整体的就业率比往年提高 5 个百分点, 求 m 的值.

18. (12 分)

已知在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_2 = 3$, 且当 $n \geq 2$ 时, $a_{n+1} = 4(a_n - a_{n-1})$.

(I) 证明: $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ 是等比数列;

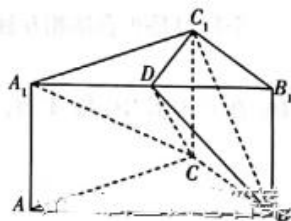
(II) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

19. (12 分)

如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, D 为棱 A_1B_1 的中点.

(I) 证明: $A_1C \parallel$ 平面 BC_1D ;

(II) 若 $C_1D \perp A_1B_1$, 且 $C_1D = \frac{1}{2}A_1B_1, AC = \sqrt{2}, AA_1 = 1$, 求二面角 $B - CD - C_1$ 的正弦值.



20. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点 A 与下顶点 B 在直线 $l: x - 2y + 1 = 0$ 的两侧, 且点 B 到 l 的距离是 A 到 l 的距离的 3 倍.

(I) 求 b 的值;

(II) 设 C 与 l 交于 P, Q 两点, 求证: 直线 BP 与 BQ 的斜率之和为定值.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 - (a+2)x (a \in \mathbf{R})$.

(I) 若 $a=0$, 求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程;

(II) 若 $f(x)$ 存在极小值点 t , 证明: $f(t) \leq -2$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22, 23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在直角坐标系 xOy 中, 圆 C 的圆心坐标为 $(2, 0)$, 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 点 M 的极坐标为 $(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$, 且过 M 点只能作一条圆 C 的切线.

(I) 求圆 C 的极坐标方程;

(II) 直线 $\theta = \alpha (0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \rho \in \mathbf{R})$ 和圆 C 相交于两点 A, B , 若 $\vec{OA} = \vec{AB}$, 求 $\cos \alpha$.

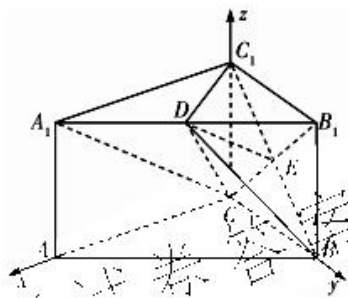
23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

已知函数 $f(x) = |2x+1| - |x-a| (a \in \mathbf{R})$.

(I) 若 $a=1$, 解不等式 $f(x) < 2$;

(II) 若 $f(x) > -1$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

所以 $A_1C \parallel$ 平面 BC_1D (5分)



(II) 由 D 为 A_1B_1 的中点, $CD \perp A_1B_1$, 且 $CD = \frac{1}{2}A_1B_1$,

可知 $A_1C = B_1C = \sqrt{2}$ 且 $A_1C_1 \perp B_1C_1$ (6分)

以 C 为坐标原点, 分别以 $\vec{CA}, \vec{CB}, \vec{CC}_1$ 的方向为 x, y, z 轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系.

..... (7分)

由已知可得 $C(0,0,0), C_1(0,0,1), D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), B(0, \sqrt{2}, 0)$,

则 $\vec{CB} = (0, \sqrt{2}, 0), \vec{CD} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), \vec{C_1D} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

设 $n = (x, y, z)$ 为平面 BCD 的法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{CB} \cdot n = \sqrt{2}y = 0, \\ \vec{CD} \cdot n = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + z = 0, \end{cases} \text{可取 } n = (-\sqrt{2}, 0, 1). \text{ (9分)}$$

设 m 为平面 CDC_1 的法向量,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{C_1D} \cdot m = 0, \\ \vec{CD} \cdot m = 0, \end{cases} \text{同理可取 } m = (-1, 1, 0). \text{ (10分)}$$

$$\text{因为 } \cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m||n|} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ (11分)}$$

所以二面角 $B-CD-C_1$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (12分)

20. 解析 (I) 由椭圆的方程可得 $A(0, b), B(0, -b)$, (1分)

$$\text{由题意可得 } \frac{|2b+1|}{\sqrt{5}} = 3 \times \frac{|-2b+1|}{\sqrt{5}}, \text{解得 } b=1 \text{ 或 } b = \frac{1}{4}. \text{ (3分)}$$

当 $b = \frac{1}{4}$ 时, 点 A, B 都在直线 l 的下方, 不符合题意, (4分)

故 $b=1$ (5分)

$$\text{(II) 联立} \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1, \\ x - 2y + 1 = 0, \end{cases} \text{消去 } y \text{ 可得 } (4+a^2)x^2 + 2a^2x - 3a^2 = 0, \text{ (6分)}$$

$$\text{设 } P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), \text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{2a^2}{4+a^2}, x_1x_2 = -\frac{3a^2}{4+a^2}. \text{ (7分)}$$

直线 BP 与 BQ 的斜率之和

$$k_{BP} + k_{BQ} = \frac{y_1 + 1}{x_1} + \frac{y_2 + 1}{x_2} \dots\dots\dots (8 \text{分})$$

$$= \frac{\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}}{x_1} + \frac{\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}}{x_2}$$

$$= 1 + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right)$$

$$= 1 + \frac{3}{2} \times \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} \dots\dots\dots (10 \text{分})$$

$$= 1 + \frac{3}{2} \times \frac{\frac{2a^2}{4+1a^2}}{\frac{4+1a^2}{3a^2}} = 2$$

因此直线 BP 与 BQ 的斜率之和为定值 2. $\dots\dots\dots (12 \text{分})$

21. 解析 (I) 若 $a=0$, 则 $f(x) = \ln x - 2x, f'(x) = \frac{1}{x} - 2$. $\dots\dots\dots (1 \text{分})$

因为 $f'(1) = -1, f(1) = -2$, $\dots\dots\dots (2 \text{分})$

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y = -(x-1) - 2$, 即 $y = -x - 1$. $\dots\dots\dots (4 \text{分})$

(II) 由题可知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2ax - (a+2) = \frac{1+2ax^2 - (a+2)x}{x} = \frac{(2x-1)(ax-1)}{x} \dots\dots\dots (5 \text{分})$$

① 若 $a \leq 0$, 由 $f'(x) = 0$ 可得 $x = \frac{1}{2}$, 当 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减, 没有极小值. $\dots\dots\dots (6 \text{分})$

② 若 $0 < a < 2$, 由 $f'(x) = 0$ 可得 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = \frac{1}{a}$,

当 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 或 $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{a})$ 时, $f'(x) < 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增, $\dots\dots\dots (7 \text{分})$

此时 $f(\frac{1}{a}) = f(\frac{1}{a}) = \ln \frac{1}{a} + \frac{1}{a} - \frac{a+2}{a} = -\ln a - \frac{1}{a} - 1$. $\dots\dots\dots (8 \text{分})$

设 $g(a) = -\ln a - \frac{1}{a} - 1$, 则 $g'(a) = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = \frac{1-a}{a^2}$,

当 $a \in (0, 1)$ 时, $g'(a) > 0$, 当 $a \in (1, 2)$ 时, $g'(a) < 0$,

所以 $g(a)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, 2)$ 上单调递减, 所以 $g(a) \leq g(1) = -2$. $\dots\dots\dots (9 \text{分})$

③ 若 $a = 2, f'(x) = \frac{(2x-1)^2}{x} \geq 0, f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 没有极值. $\dots\dots\dots (10 \text{分})$

④ 若 $a > 2$, 当 $x \in (0, \frac{1}{a})$ 或 $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (\frac{1}{a}, \frac{1}{2})$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{a}, \frac{1}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增,

此时 $f(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \ln \frac{1}{2} + \frac{a}{4} - \frac{a+2}{2} = -\ln 2 - \frac{a}{4} - 1 < -\ln 2 - \frac{1}{2} - 1 < -2$. $\dots\dots\dots (11 \text{分})$

综上可得: $f(t) \leq -2$ (12分)

22. 解析 (I) 由点 M 的极坐标可得其直角坐标为 $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, (1分)

因为过 M 点只能作一条圆 C 的切线, 所以点 M 在圆 C 上, (2分)

因为 $|MC|^2 = (\frac{3}{2} - 2)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 1$, (3分)

所以圆 C 的直角坐标方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 1$, 即 $x^2 - 4x + 3 = 0$, (4分)

所以圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2 - 4\rho\cos\theta + 3 = 0$ (5分)

(II) 将 $\theta = \alpha$ 代入圆 C 的极坐标方程得 $\rho^2 - 4\rho\cos\alpha + 3 = 0$,

由 $\Delta = 16\cos^2\alpha - 12 > 0$, 即 $\cos\alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$, (6分)

设点 A, B 的极坐标分别为 $A(\rho_A, \alpha), B(\rho_B, \alpha)$,

则 $\begin{cases} \rho_A + \rho_B = 4\cos\alpha, \\ \rho_A\rho_B = 3, \end{cases}$ (7分)

又由 $\vec{OA} = \vec{OB}$, 可得 $\rho_B = 2\rho_A$, (8分)

联立解得 $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{6}}{8}$ (10分)

23. 解析 (I) 若 $a = 1$,

则 $f(x) = |2x+1| - |x-1| = \begin{cases} -x-2, & x < -\frac{1}{2}, \\ 3x, & -\frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ x+2, & x > 1. \end{cases}$ (2分)

$f(x) < 2$ 等价于 $\begin{cases} x < -\frac{1}{2}, \\ -x-2 < 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ 3x < 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x > 1, \\ x+2 < 2, \end{cases}$

所以 $-4 < x < -\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3}$ 或无解. (4分)

综上, 不等式 $f(x) < 2$ 的解集是 $\{x \mid -4 < x < \frac{2}{3}\}$ (5分)

(II) 当 $x < \min\{-\frac{1}{2}, a\}$ 时, $f(x) = -x-1-a$, 单调递减;

当 $x > \max\{-\frac{1}{2}, a\}$ 时, $f(x) = x+1+a$, 单调递增.

所以 $f(x)$ 的最小值在 $-\frac{1}{2}$ 或 a 处取得.

要使 $f(x) > -1$ 恒成立, 则需 $f(-\frac{1}{2}) > -1$ 且 $f(a) > -1$ (7分)

由 $f(-\frac{1}{2}) = -|\frac{1}{2} + a| > -1$, 解得 $-\frac{3}{2} < a < \frac{1}{2}$, (8分)

而 $f(a) = |2a+1| > -1$ 恒成立. (9分)

综上可得 a 的取值范围是 $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ (10分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

