

# 青岛市 2023 年高三年级第一次适应性检测

## 数学参考答案及评分标准

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1-8: ACBB DCCA

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

9. AC      10. AB      11. ABD      12. BCD

三、填空题：本题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.  $(-1, -2)$  答案不唯一；      14.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ；      15.  $2\sqrt{3}$ ；      16.  $0, \frac{1}{1011}$ .

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

解：(1) 由题意得  $f(x) = 2\cos^2 \omega x + \sin 2\omega x = 1 + \cos 2\omega x + \sin 2\omega x$   
 $= \sqrt{2} \sin(2\omega x + \frac{\pi}{4}) + 1$  ..... 2 分

因为  $T = 2\pi$ ，所以  $2\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$  ..... 3 分

所以  $f(x) = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) + 1$

令  $x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}$  得， $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

所以函数  $f(x)$  图象的对称轴方程为  $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) ..... 5 分

(2) 由  $f(\alpha) = \frac{1}{3}$  得  $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{3}$  ..... 6 分

所以  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{3}$ ，所以  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{4}{9}$ ，即  $1 + \sin 2\alpha = \frac{4}{9}$

所以  $\sin 2\alpha = -\frac{5}{9}$  ..... 10 分

18. (本小题满分 12 分)

解：(1) 因为  $S_2, S_4, S_6 + 4$  成等差数列， $a_2, a_4, a_6$  成等比数列

所以  $\begin{cases} 2S_4 = S_2 + S_6 + 4 \\ a_4^2 = a_2 \cdot a_6 \end{cases}$  ..... 2 分

所以  $\begin{cases} 2(4a_1 + 6d) = (2a_1 + d) + (5a_1 + 10d) + 4 \\ (a_1 + 3d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 7d) \end{cases}$ ，整理得  $\begin{cases} a_1 + d = 4 \\ a_1 d = d^2 \end{cases}$

因为  $d \neq 0$ ，解得： $a_1 = d = 2$  ..... 5 分

所以  $S_n = 2n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 + n$  ..... 6 分

(2) 由 (1) 得  $2b_n - T_n = \frac{n+2}{n(n+1)}$ ,  $2b_{n+1} - T_{n+1} = \frac{n+3}{(n+1)(n+2)}$  ..... 7分

所以两式相减得:  $2b_n - 2b_{n+1} + T_{n+1} - T_n = \frac{n+2}{n(n+1)} - \frac{n+3}{(n+1)(n+2)}$  ..... 8分

整理得:  $2b_n - b_{n+1} = \frac{2}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

所以  $2[b_n - \frac{1}{n(n+1)}] = b_{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

即  $b_{n+1} - \frac{1}{S_{n+1}} = 2(b_n - \frac{1}{S_n})$  ..... 10分

因为  $b_1 = \frac{3}{2}$ ,  $b_1 - \frac{1}{1 \times 2} = 1 \neq 0$ ,

所以  $\{b_n - \frac{1}{S_n}\}$  是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列 ..... 11分

所以  $b_n - \frac{1}{n(n+1)} = 2^{n-1}$ , 所以  $b_n = \frac{1}{n(n+1)} + 2^{n-1}$  ..... 12分

19. (本小题满分 12 分)

解: (1) 当  $D$  为圆弧  $BC$  的中点, 即  $\angle CAD = \frac{\pi}{3}$  时,  $BC \perp PD$  ..... 1分

证明如下: 因为  $D$  为圆弧  $BC$  的中点,

所以  $\angle CAD = \angle BAD = \frac{\pi}{3}$ , 即  $AD$  为  $\angle CAB$  的平分线

因为  $AC = AB$ , 所以  $AD$  为等腰  $\triangle CAB$  的高线, 即  $AD \perp BC$  ..... 2分

因为  $PA \perp AB, PA \perp AC, AB \cap AC = A, AB, AC \subset$  平面  $ABDC$

所以  $PA \perp$  平面  $ABDC$ , 所以  $PA \perp BC$  ..... 3分

因为  $PA \cap AD = A$ , 所以  $BC \perp$  面  $PAD$

所以  $BC \perp PD$  ..... 4分

(2) 由 (1) 得,  $PA$  为四棱锥  $P-ABDC$  的高,

因为  $PA = 4$ , 所以, 当底面积  $S_{ABDC}$  取最大值时, 四棱锥  $P-ABDC$  体积最大 ..... 5分

设  $\angle CAD = \alpha$ , 则  $\angle BAD = \frac{2\pi}{3} - \alpha, \alpha \in (0, \frac{2\pi}{3})$

$$S_{ABDC} = S_{\triangle CAD} + S_{\triangle BAD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin \alpha + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin(\frac{2\pi}{3} - \alpha)$$

$$= 2[\sin \alpha + \sin(\frac{2\pi}{3} - \alpha)] = 2\sqrt{3} \sin(\alpha + \frac{\pi}{6})$$

因为  $\alpha \in (0, \frac{2\pi}{3}), \alpha + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$

所以  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  时,  $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = 1, S_{ABDC}$  取最大值  $2\sqrt{3}$

所以, 当四棱锥  $P-ABDC$  体积最大时,  $\angle CAD = \angle BAD = \frac{\pi}{3}$  ..... 7分

过  $A$  在平面  $ABDC$  内作直线  $AE \perp AB$ , 交圆弧  $BC$  于点  $E$ ,  
由题,  $AE, AB, AP$  两两垂直, 以  $A$  为原点, 分别以  $AE, AB, AP$  所在直线为  $x$  轴,  $y$  轴,  
 $z$  轴建立如图所示空间直角坐标系, ..... 8分

则  $A(0,0,0), P(0,0,4), B(0,2,0), D(\sqrt{3},1,0), C(\sqrt{3},-1,0)$   
因为  $\vec{PD} = (\sqrt{3},1,-4), \vec{CD} = (0,2,0), \vec{DB} = (-\sqrt{3},1,0)$ , ..... 9分

设平面  $PCD$  的法向量为  $\vec{n} = (x_1, y_1, z_1)$

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{PD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{CD} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} \sqrt{3}x_1 + y_1 - 4z_1 = 0 \\ 2y_1 = 0 \end{cases},$$

令  $z_1 = \sqrt{3}$ , 得  $\vec{n} = (4, 0, \sqrt{3})$  ..... 10分

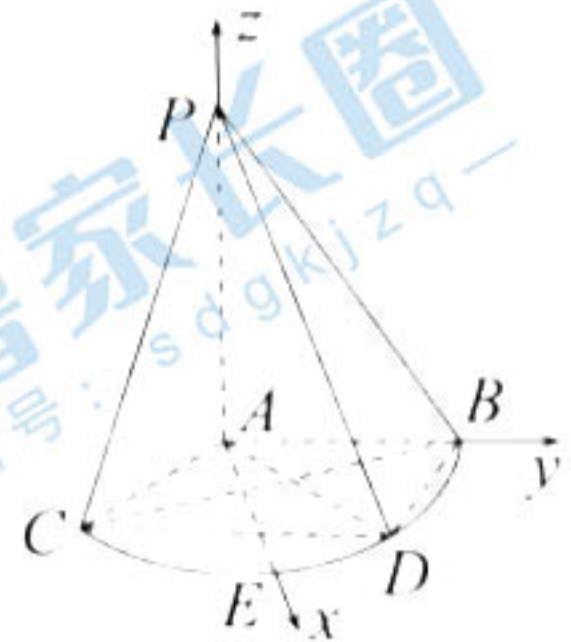
设平面  $PBD$  的法向量为  $\vec{m} = (x_2, y_2, z_2)$

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{PD} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{DB} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} \sqrt{3}x_2 + y_2 - 4z_2 = 0 \\ -\sqrt{3}x_2 + y_2 = 0 \end{cases},$$

令  $z_2 = \sqrt{3}$ , 得  $\vec{m} = (2, 2\sqrt{3}, \sqrt{3})$  ..... 11分

设平面  $PCD$  与平面  $PBD$  的夹角为  $\theta$ , 则  $\cos \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{11}{19}$

所以平面  $PCD$  与平面  $PBD$  夹角的余弦值为  $\frac{11}{19}$  ..... 12分



20. (本小题满分 12 分)

解: (1) 因为前 2 个矩形面积之和为  $(0.01+0.03) \times 10 = 0.4 < 0.5$ ,  
前 3 个矩形面积之和为  $(0.01+0.03+0.04) \times 10 = 0.8 > 0.5$ ,  
则中位数在  $(80,90)$  内, 设为  $m$ , 则  $(m-80) \times 0.04 = 0.5 - 0.4 = 0.1$ ,  
解得  $m = 82.5$ , 即中位数为 82.5. .... 3分

(2) 因为成绩在  $[90,100]$  的频率为  $\frac{1}{5}$ , 所以概率为  $\frac{1}{5}$ ,

则  $X \sim B(10, \frac{1}{5})$ , 所以  $P(X=k) = C_{10}^k (\frac{1}{5})^k (\frac{4}{5})^{10-k}$ , ..... 5分

$$\text{所以} \frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} = \frac{C_{10}^k (\frac{1}{5})^k (\frac{4}{5})^{10-k}}{C_{10}^{k-1} (\frac{1}{5})^{k-1} (\frac{4}{5})^{11-k}} = 1 + \frac{11-5k}{4k}, \text{ ..... 6分}$$

当  $1 \leq k \leq 2$  时,  $P(X=k) > P(X=k-1)$ ,  $P(X=0) < P(X=1) < P(X=2)$ ;

当  $k \geq 3$  时,  $P(X=k) < P(X=k-1)$ ,  $P(X=2) > P(X=3) > \dots$ ,

所以  $k=2$  时,  $P(X=k)$  取到最大值. .... 7分

(3) 甲进入复赛的概率  $P_1 = \frac{C_1^3 C_2^1 + C_1^2 C_2^2}{C_1^4} = \frac{3}{5}$ , 乙进入复赛的概率  $P_2 = \frac{C_1^1 C_2^3 + C_1^2 C_2^2}{C_1^4} = \frac{1}{5}$ ,

故甲、乙两人进入复赛的概率分别为  $\frac{3}{5}, \frac{1}{5}$ . ..... 8分

由题意可得:  $\xi$  的可能取值为 0, 1, 2, 则有:  $P(\xi=0) = (1-P_1)(1-P_2) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{25}$ ,

$P(\xi=1) = P(1-P_2) + (1-P_1)P_2 = \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{14}{25}$ ,  $P(\xi=2) = P_1 P_2 = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{25}$ ,

所以  $\xi$  的分布列为:

$\xi$	0	1	2
$P$	$\frac{8}{25}$	$\frac{14}{25}$	$\frac{3}{25}$

..... 11分

所以  $E(\xi) = 0 \times \frac{8}{25} + 1 \times \frac{14}{25} + 2 \times \frac{3}{25} = \frac{4}{5}$  ..... 12分

21. (本小题满分 12 分)

解: (1) 记  $|F_1 F_2| = 2c$ , 由题意知:  $|AF_1| + |AF_2| = a, 2c = \sqrt{2}a$  ..... 1分

所以  $S_{\triangle A O_1} = \frac{1}{2} a^2 = 1$ , 解得  $a = \sqrt{2}$  ..... 2分

所以  $b=1, c=1$  ..... 3分

所以椭圆  $C$  的标准方程为:  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  ..... 4分

(2) (i) 选②③为条件: 设  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ,

当直线  $l$  的斜率不存在时, 根据椭圆的对称性不妨设点  $P$  在第一象限,

则由  $k_1 k_2 = -\frac{1}{2}$ , 可得  $k_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

此时直线  $BP$  的方程为  $y = \frac{\sqrt{2}}{2} x$ , 联立  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ , 解得  $P(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$

所以  $S = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ..... 6分

当直线  $l$  的斜率存在时, 设直线  $l$  的方程为:  $y = kx + t$ ,

则  $k_1 k_2 = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{2}$ , 即  $x_1 x_2 + 2y_1 y_2 = 0$

将  $y = kx + t$  代入  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  得:  $(1+2k^2)x^2 + 4ktx + 2t^2 - 2 = 0$

所以  $x_1 + x_2 = -\frac{4kt}{1+2k^2}, x_1 x_2 = \frac{2t^2 - 2}{1+2k^2}$  ..... 7分

所以  $y_1 y_2 = (kx_1 + t)(kx_2 + t) = k^2 x_1 x_2 + kt(x_1 + x_2) + t^2 = \frac{t^2 - 2k^2}{1 + 2k^2}$

所以  $\frac{2t^2 - 2}{1 + 2k^2} + 2 \frac{t^2 - 2k^2}{1 + 2k^2} = 0$ , 即  $1 + 2k^2 = 2t^2$  ..... 8分

$|PQ| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{1+2k^2} - t^2}{1+2k^2}$  ..... 10分

因为点  $O$  到直线  $l$  的距离  $d = \frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}$

所以  $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{1+2k^2} - t^2}{1+2k^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

综上, 结论成立. .... 12分

(ii) 选①③为条件: 设  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ,

当直线  $l$  的斜率不存在时, 根据椭圆的对称性不妨设点  $P$  在第一象限,

则由  $S = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 可得  $S = \frac{1}{2} x_1 \cdot 2y_1 = x_1 \cdot y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

又  $\frac{x_1^2}{2} + y_1^2 = 1$ , 解得  $P(1, \frac{\sqrt{2}}{2}), Q(1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ , 所以  $k_1 k_2 = -\frac{1}{2}$  ..... 6分

当直线  $l$  的斜率存在时, 设直线  $l$  的方程为:  $y = kx + t$ ,

将  $y = kx + t$  代入  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  得:  $(1 + 2k^2)x^2 + 4ktx + 2t^2 - 2 = 0$

所以  $x_1 + x_2 = -\frac{4kt}{1+2k^2}, x_1 x_2 = \frac{2t^2 - 2}{1+2k^2}$  ..... 7分

$|PQ| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{1+2k^2} - t^2}{1+2k^2}$  ..... 8分

因为点  $O$  到直线  $l$  的距离  $d = \frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}$

所以  $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{1+2k^2} - t^2}{1+2k^2} = \sqrt{2} \cdot |t| \cdot \frac{\sqrt{1+2k^2} - t^2}{1+2k^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

即  $1 + 2k^2 = 2t^2$  ..... 10分

因为  $y_1 y_2 = (kx_1 + t)(kx_2 + t) = k^2 x_1 x_2 + kt(x_1 + x_2) + t^2 = \frac{t^2 - 2k^2}{1 + 2k^2}$

所以  $k_1 k_2 = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = \frac{\frac{t^2 - 2k^2}{1 + 2k^2}}{\frac{2t^2 - 2}{1 + 2k^2}} = \frac{t^2 - 2k^2}{2t^2 - 2} = \frac{1 - t^2}{2t^2 - 2} = -\frac{1}{2}$

综上, 结论成立. .... 12分

(iii) 选①②为条件: 设  $P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$ ,  $W(x_0, y_0)$

当直线  $l$  的斜率不存在时, 根据椭圆的对称性不妨设点  $P$  在第一象限,

则  $Q(x_1, -y_1)$ ,  $W(0, y_0)$ ,

$$\text{所以 } S = \frac{1}{2} x_1 \cdot 2y_1 = x_1 y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 又 } \frac{x_1^2}{2} + y_1^2 = 1, \text{ 解得 } P(1, \frac{\sqrt{2}}{2}), Q(1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\text{所以 } k_1 k_2 = \frac{(y_1 - y_0)(-y_1 - y_0)}{x_1 - x_1} = y_0^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}, \text{ 所以 } y_0 = 0$$

所以  $W(0, 0)$  为坐标原点, 满足题意..... 6 分

当直线  $l$  的斜率存在时, 设  $W(x_0, kx_0)$ , 直线  $l$  的方程为:  $y = kx + t$ ,

$$\text{将 } y = kx + t \text{ 带入 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \text{ 得: } (1 + 2k^2)x^2 + 4ktx + 2t^2 - 2 = 0$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = -\frac{4kt}{1 + 2k^2}, x_1 x_2 = \frac{2t^2 - 2}{1 + 2k^2}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$|PQ| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{\sqrt{1 + 2k^2 - t^2}}{1 + 2k^2} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{点 } W \text{ 到直线 } l \text{ 的距离 } d = \frac{|t|}{\sqrt{1 + k^2}}$$

$$\text{所以 } S = \frac{1}{2} \cdot \frac{|t|}{\sqrt{1 + k^2}} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + k^2} \cdot \frac{\sqrt{1 + 2k^2 - t^2}}{1 + 2k^2} = \sqrt{2} \cdot |t| \cdot \frac{\sqrt{1 + 2k^2 - t^2}}{1 + 2k^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{即 } 1 + 2k^2 = 2t^2 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } y_1 y_2 = (kx_1 + t)(kx_2 + t) = k^2 x_1 x_2 + kt(x_1 + x_2) + t^2 = \frac{t^2 - 2k^2}{1 + 2k^2}$$

$$y_1 + y_2 = kx_1 + t + kx_2 + t = k(x_1 + x_2) + 2t = \frac{2t}{1 + 2k^2}$$

$$\text{则由 } k_1 k_2 = \frac{(y_1 - kx_0)(y_2 - kx_0)}{(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)} = -\frac{1}{2}, \text{ 即 } (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + 2(y_1 - kx_0)(y_2 - kx_0) = 0$$

$$\text{得: } x_1 x_2 - x_0(x_1 + x_2) + x_0^2 + 2y_1 y_2 - 2kx_0(y_1 + y_2) + 2k^2 x_0^2 = 0$$

$$\text{即 } (1 + 2k^2)^2 x_0^2 - (4k^2 - 4t^2 + 2) = 0, \text{ 因为 } 1 + 2k^2 = 2t^2, 4k^2 - 4t^2 + 2 = 0$$

所以  $x_0 = 0$  即  $W(0, 0)$

综上所述,  $W$  满足条件..... 12 分

22. (本小题满分 12 分)

解: (1) 曲线  $y = f(x)$  与圆  $C$  一条公切线的方程为  $y = x - 1$  ..... 3 分

(2) (i) 设曲线  $y = f(x)$  与圆  $C$  公切线  $l$  的方程为  $y = kx + m$  (显然,  $k$  存在)

因为  $l$  与曲线  $y = f(x)$  相切, 且  $f'(x) = \frac{1}{x}$ , 所以切点为  $(\frac{1}{k}, \ln \frac{1}{k})$ ,

$l: y - \ln \frac{1}{k} = k(x - \frac{1}{k})$ , 所以  $l: y = kx - 1 - \ln k$ , 即  $m = -1 - \ln k$

因为  $l$  与圆  $C$  相切, 所以  $\frac{|b-m|}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{2}$ , 即  $(b-m)^2 - 2k^2 - 2 = 0$

所以  $(b+1+\ln k)^2 - 2k^2 - 2 = 0$

令  $g(x) = (b+1+\ln x)^2 - 2x^2 - 2, x > 0$ ,

则  $g'(x) = \frac{2(b+1+\ln x)}{x} - 4x = \frac{2[(b+1+\ln x) - 2x^2]}{x}$

设  $h(x) = (b+1+\ln x) - 2x^2$ , 则  $h'(x) = \frac{1}{x} - 4x = \frac{(1-2x)(1+2x)}{x}$  ..... 5 分

易证明:  $\ln x \leq x - 1$  ..... 6 分

①当  $b > 1$  时, 因为  $h(x)$  在  $(0, \frac{1}{2})$  上单调递增, 在  $(\frac{1}{2}, +\infty)$  上单调递减; 所以  $h(x) \leq h(\frac{1}{2})$ ,

因为  $h(\frac{1}{2}) = b + \frac{1}{2} - \ln 2 > 0$ ,  $h(e^{-b-1}) = -2(e^{-b-1})^2 < 0$ ,

$h(2b) = b + 1 + \ln(2b) - 8b^2 < 3b - 8b^2 < 0$ ;

所以存在  $\alpha \in (e^{-b-1}, \frac{1}{2}), \beta \in (\frac{1}{2}, 2b)$ , 使得  $h(\alpha) = h(\beta) = 0$

所以  $b+1+\ln \alpha - 2\alpha^2 = 0, b+1+\ln \beta - 2\beta^2 = 0$

所以  $g(x)$  在  $(0, \alpha)$  上单调递减, 在  $(\alpha, \beta)$  上单调递增, 在  $(\beta, +\infty)$  上单调递减; ..... 7 分

因为  $g(\alpha) = 4\alpha^4 - 2\alpha^2 - 2 < 0$ , 且  $g(\beta) \geq g(1) = (b+1)^2 - 4 > 0$ ,

又因为  $g(e^{-3b-1}) = 4b^2 - 2(e^{-3b-1})^2 - 2 > 0$ ,

且  $g(3b) = [b+1+\ln(3b)]^2 - 18b^2 - 2 < 16b^2 - 18b^2 - 2 < 0$ ,

所以存在  $x_1 \in (e^{-3b-1}, \alpha), x_2 \in (\alpha, \beta), x_3 \in (\beta, 3b)$ , 使得  $g(x_1) = g(x_2) = g(x_3) = 0$

所以当  $b > 1$  时, 曲线  $y = f(x)$  与圆  $C$  恰有三条公切线 ..... 8 分

②当  $0 < \ln 2 - \frac{1}{2} < b \leq 1$  时, 因为  $h(\frac{1}{2}) > 0, h(e^{-b-1}) < 0, h(1) = (b+1)^2 - 4 \leq 0$ ;

所以存在  $\alpha \in (e^{-b-1}, \frac{1}{2}), \beta \in (\frac{1}{2}, 1]$ , 使得  $h(\alpha) = h(\beta) = 0$

所以  $g(x)$  在  $(0, \alpha)$  上单调递减, 在  $(\alpha, \beta)$  上单调递增, 在  $(\beta, +\infty)$  上单调递减;

所以  $g(\alpha) = 4\alpha^4 - 2\alpha^2 - 2 < 0$ , 且  $g(\beta) = 4\beta^4 - 2\beta^2 - 2 \leq 0$ ,

所以  $g(x)$  不可能存在三个零点,

所以当  $\ln 2 - \frac{1}{2} < b \leq 1$  时, 曲线  $y = f(x)$  与圆  $C$  不可能有三条公切线 ..... 9 分

③当  $b \leq \ln 2 - \frac{1}{2}$  时,  $h(\frac{1}{2}) \leq 0$ ; 所以  $h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 最多一个零点;

所以  $g(x)$  最多一个极值点, 不可能有三个零点;

所以当  $b \leq \ln 2 - \frac{1}{2}$  时, 曲线  $y = f(x)$  与圆  $C$  不可能有三条公切线 ..... 10 分

综上, 若曲线  $y = f(x)$  与圆  $C$  恰有三条公切线, 则  $b$  的取值范围为  $b > 1$ .

(ii) 函数  $g(x) = (b+1+\ln x)^2 - 2x^2 - 2$  的零点,

即方程  $|b+1+\ln x| = \sqrt{2x^2+2}$  的解,

即曲线  $y = |b+1+\ln x|$  和曲线  $y = \sqrt{2x^2+2}$  ( $\frac{y^2}{2} - x^2 = 1 (y > 0)$ ) 交点的横坐标,

结合图象, 显然存在  $T(m, n)$ , 使得  $b+1+\ln m = n$  成立

所以  $f(mx) = f(x) + \ln m = f(x) + n - 1 - b$  对任意  $x > 0$  恒成立 ..... 12 分