

2021-2022 学年第一学期期末六校联合调研试题参考答案

高二数学试题

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后, 将答题卡交回.

一、单项选择题(本大题共 8 个小题, 每小题 5 分, 共 40 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. 若直线 $l_1: mx + y + 1 = 0$ 与 $l_2: 2x - y - 3 = 0$ 平行, 则实数 m 等于 (B)

- A. 1 B. -2 C. 4 D. 0

2. 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的渐近线方程为 (B)

- A. $y = \pm \frac{3}{4}x$ B. $y = \pm \frac{4}{3}x$ C. $y = \pm \frac{3}{5}x$ D. $y = \pm \frac{5}{3}x$

3. 已知圆 C 过点 $A(-2, 0), B(0, 4)$, 圆心在 x 轴上, 则圆 C 的方程为 (C)

- A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$ B. $(x-1)^2 + y^2 = 9$
C. $(x-3)^2 + y^2 = 25$ D. $x^2 + y^2 = 16$

4. 函数 $f(x) = kx - \ln x$ 在 $[1, e]$ 上单调递增, 则 k 的取值范围是 (A)

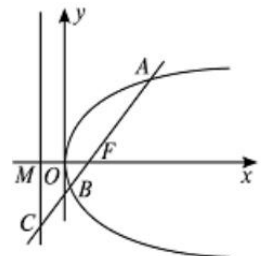
- A. $[1, +\infty)$ B. $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ C. $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ D. $(1, +\infty)$

5. 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, T_n 是其前 n 项之积, 若 $a_6 \cdot a_7 = 2a_8$, 则 T_9 的值是 (D)

- A. 1024 B. 256 C. 2 D. 512

6. 如图, 过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 的直线 l 交抛物线于点 A, B , 交其准线于点 C , 准线与对称轴交于点 M , 若 $|BC| = 3|BF|$, 且 $|AF| = 3$, 则此抛物线的方程为 (B)

- A. $y^2 = 2x$ B. $y^2 = 4x$ C. $y^2 = 6x$ D. $y^2 = 12x$



第 6 题

7. 设集合 $M = \{(x, y) | x = -\sqrt{4-y^2}\}$, 集合 $N = \{(x, y) | (x+3)^2 + (y-3)^2 = r^2\} (r > 0)$, 当

$M \cap N$ 有且仅有一个元素时, 则 r 的取值范围为 (B)

A. $3\sqrt{2}-2$ 或 $3\sqrt{2}+2$

B. $r = 3\sqrt{2}-2$ 或 $\sqrt{10} < r \leq \sqrt{34}$

C. $r = 3\sqrt{2}+2$ 或 $\sqrt{10} < r \leq \sqrt{34}$

D. $r = 3\sqrt{2}-2$ 或 $\sqrt{10} < r < \sqrt{34}$

8. 已知 a, b 为正数, $\ln\left(\frac{b}{3a}\right) > 8^a - 2^b$, 则下列不等式一定成立的是 (A)

A. $3a < b$

B. $b < 3a$

C. $a^3 < b$

D. $b < a^3$

二、多项选择题 (本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每小题给出的选项中, 有多项是符合题目要求. 全选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 下列说法正确的是 (AB)

A. 点 $(0, 2)$ 到直线 $y = x + 1$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. 任意一条直线都有倾斜角, 但不一定有斜率.

C. 直线 $x - 2y + 4 = 0$ 与两坐标轴围成的三角形的面积是 8.

D. 经过点 $(2, 2)$ 且在 x 轴和 y 轴上截距都相等的直线方程为 $x + y - 4 = 0$.

10. 下列说法中正确的有 (BCD)

A. $\left(\sin \frac{\pi}{4}\right)' = \cos \frac{\pi}{4}$.

B. 已知函数 $f(x)$ 在 R 上可导, 且 $f'(1) = 1$, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+2\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = 2$.

C. 一质点的运动方程为 $S = t^2$, 则该质点在 $t = 2$ 时的瞬时速度是 4.

D. 已知函数 $f(x) = \cos x$, 则函数 $y = f'(x)$ 的图像关于原点对称.

11. 对于数列 $\{a_n\}$, 若存在正整数 $k (k \geq 2)$, 使得 $a_k > a_{k-1}, a_k > a_{k+1}$, 则称 a_k 是数列 $\{a_n\}$ 的“峰值”, k 是数列 $\{a_n\}$ 的“峰值点”, 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_n = |n + \frac{8}{n} - 9|$, 下面哪些数不能作为数列 $\{a_n\}$ 的“峰值点”?

(ACD)

A. 1

B. 3

C. 6

D. 12

12. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 的直线与双曲线交于 A, B 两点,

A 在第一象限, 若 $\triangle ABF_1$ 为等边三角形, 则下列结论一定正确的是 (BD)

A. 双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{3}$

B. $\triangle AF_1F_2$ 的面积为 $2\sqrt{3}a^2$

C. $\triangle AF_1F_2$ 内切圆半径为 $(\sqrt{3} - 1)a$

D. $\triangle BF_1F_2$ 的内心在直线 $x = \pm a$ 上

三、填空题（本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，若 $a_1 + a_2 + a_3 = 2$ ， $a_3 + a_4 + a_5 = 5$ ，则 $a_5 + a_6 + a_7 =$ 8 .

14. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点为 F_1, F_2 ，过 F_2 作 x 轴垂线交椭圆于点 P ，若 $\triangle PF_1F_2$ 为等腰直角三角形，则椭圆的离心率 $\sqrt{2} - 1$

15. 已知双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ ， $A(-4, 0)$ ， $B(-1, 0)$ ，双曲线 C 上存在一点 P 使得 $|PA| = 2|PB|$ ，则实数 a 的最大值为 2 .

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x+2|, & x \leq 0 \\ x^3 - 3x + 2, & x > 0 \end{cases}$ ，设 $g(x) = kx + \frac{7}{4}$ ，且函数 $y = f(x) - g(x)$ 有 3 个不同的零点，则实数 k 的取值范围为 $\left\{\frac{7}{8}\right\} \cup \left(-\frac{9}{4}, -1\right]$.

四、解答题（本大题共 6 个小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. 已知双曲线 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过 F_2 作斜率为 $\sqrt{7}$ 的弦 AB ，求：

(1) AB 的长；

(2) $\triangle F_1AB$ 的周长.

解析：法一：(1) 设点 A, B 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ，由题意知双曲线的左、右焦点坐标分别为 $F_1(-3, 0), F_2(3, 0)$ ，弦 AB 的方程为 $y = \sqrt{7}(x - 3)$ ，.....1 分

与 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$ 联立得 $x^2 - 12x + 20 = 0$ ，解得 $x_1 = 2, x_2 = 10$ ，.....3 分

所以 $AB = \sqrt{1 + k^2}|x_1 - x_2| = \sqrt{1 + 7}|2 - 10| = 16\sqrt{2}$5 分

(2) 由双曲线定义可知 $AF_1 - AF_2 = 2\sqrt{2}, BF_1 - BF_2 = 2\sqrt{2}$ ，.....7 分

两式相加得 $AF_1 + BF_1 - (AF_2 + BF_2) = AF_1 + BF_1 - AB = 4\sqrt{2}$ ，

由(1)知 $AB = 16\sqrt{2}$ ，所以 $AF_1 + BF_1 = 20\sqrt{2}$ ，.....9 分

所以 $\triangle F_1AB$ 的周长为 $AF_1 + BF_1 + AB = 36\sqrt{2}$10 分

法二：(1) 设点 A, B 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ，由题意知双曲线的左、右焦点坐标分别为 $F_1(-3, 0), F_2(3, 0)$ ，弦 AB 的方程为 $y = \sqrt{7}(x - 3)$ ，.....1 分

与 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$ 联立得 $x^2 - 12x + 20 = 0$ ，解得 $x_1 = 2, x_2 = 10$ ，

代入弦 AB 的方程为 $y = \sqrt{7}(x - 3)$ 分别解得 $y_1 = -\sqrt{7}, y_2 = 7\sqrt{7}$3 分

所以 $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(2 - 10)^2 + (-\sqrt{7} - 7\sqrt{7})^2} = 16\sqrt{2}$5 分

(2) 由(1)知 $AB = 16\sqrt{2}$ ，

$AF_1 = \sqrt{(2 + 3)^2 + (-\sqrt{7} - 0)^2} = 4\sqrt{2}$ ，.....7 分

$BF_1 = \sqrt{(10 + 3)^2 + (-7\sqrt{7} - 0)^2} = 16\sqrt{2}$ ，.....9 分

所以 $\triangle F_1AB$ 的周长为 $AF_1 + BF_1 + AB = 36\sqrt{2}$10 分

注：其他解法请视同给分.

18.已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 1$ ，其前 n 项和为 S_n ，且满足 $S_{n+1} = S_n + a_n + 1$ ，

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+2}}$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，且 $T_n = \frac{17}{30}$ ，求 n .

解：(1) 法1°：由 $S_{n+1} = S_n + a_n + 1$ 得 $a_{n+1} - a_n = 1$ ，

从而数列 $\{a_n\}$ 是以1为首项1为公差的等差数列，

所以 $a_n = n$.

法2°： $S_{n+1} = S_n + a_n + 1$ ①

当 $n \geq 2$ 时 $S_n = S_{n-1} + a_{n-1} + 1$ ②

①-②得 $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$ ，

从而数列 $\{a_n\}$ 是以1为首项的等差数列，

当 $n=1$ 时， $S_2 = S_1 + a_1 + 1$ 得 $a_2 = 2$ ，所以公差 $d=1$ ，

所以 $a_n = n$.

(2) 由(1)得 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+2}} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$

$T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$

$= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right]$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$,

由 $T_n = \frac{17}{30}$ 得 $11n^2 - 27n - 68 = 0$

又 $n \in \mathbb{N}^*$ ，所以 $n=4$.

说明：法2°中 $n \geq 2$ 不写扣1分；第2问中 $11n^2 - 27n - 68 = 0$ 未得出，答案正确不扣分，若答案不正确只得8分.

19. 已知函数 $f(x) = ax - \ln x$.

(1) 若 $a = 1$, 求函数 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 讨论函数 $y = f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的单调性.

解: (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = x - \ln x$, 则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, 1 分

故切线的斜率 $k = f'(1) = 0$ 2 分

又 $f(1) = 1$ 3 分

所以函数 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为: $y = 1$ 4 分

(方法一) (2) 由 $f(x) = ax - \ln x$, 得 $f'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax - 1}{x}$

① 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减; 5 分

② 当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减; 7 分

③ 当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{a}$

当 $1 \leq x < \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $\left[1, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减;

当 $\frac{1}{a} < x \leq 2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a}, 2\right]$ 上单调递增; 9 分

④ 当 $a \geq 1$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增; 11 分

综上: 当 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减;

当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $\left[1, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, 2\right]$ 上单调递增;

当 $a \geq 1$ 时, $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增 12 分

(方法二) (2) 由 $f(x) = ax - \ln x$, 得 $f'(x) = a - \frac{1}{x}$

因 $x \in [1, 2]$, 故 $\frac{1}{x} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

① 当 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减; 7 分

② 当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{a}$

当 $1 \leq x < \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $\left[1, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减;

当 $\frac{1}{a} < x \leq 2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a}, 2\right]$ 上单调递增; 9 分

③当 $a \geq 1$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增; 11 分

综上: 当 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减;

当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $\left[1, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, 2\right]$ 上单调递增;

当 $a \geq 1$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增. 12 分

20. 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 6y + 4 = 0$, $A(2, 2)$ 是圆上一点, 过 A 作直线 l 交圆 C 于另一点 B , 交 x 轴正半轴于点 D , 且 A 为 BD 的中点.

(1) 求圆 C 在点 A 处的切线方程;

(2) 求直线 l 的方程.

解: 圆 $C: x^2 + y^2 - 6y + 4 = 0$ 可化为 $x^2 + (y - 3)^2 = 5$, 圆心 $C(0, 3)$

(1) 因为直线 CA 的斜率为 $\frac{3-2}{0-2} = -\frac{1}{2}$, 所以圆 C 在 A 点处切线斜率为 2, 2 分

所以切线方程为 $y - 2 = 2(x - 2)$ 即 $2x - y - 2 = 0$; 4 分

(2) 法 1°: 由题意设 $D(t, 0)$

因为 $A(2, 2)$ 是 BD 中点, 所以 $B(4-t, 4)$ 6 分

将 B 代入圆 C 方程得 $(4-t)^2 + (4-3)^2 = 5$ 7 分

解得 $t=2$ 或 $t=6$ 9 分

当 $t=2$ 时, $D(2, 0)$, 此时 l 方程为 $x=2$ 10 分

当 $t=6$ 时, $D(6, 0)$, 此时 l 方程为 $x+2y-6=0$ 11 分

所以 l 方程为 $x=2$ 或 $x+2y-6=0$ 12 分

法 2°: 由题意知直线 l 的斜率不为 0, 设 l 方程为: $x-2=m(y-2)$

由 $\begin{cases} x^2 + (y-3)^2 = 5 \\ x-2=m(y-2) \end{cases}$ 得 $(m^2+1)y^2 - 2(m+2)y + 4(m^2-2m+2) = 0$ 6 分

由 $\Delta > 0$ 得 $m \neq \frac{1}{2}$

因为 l 过点 A 和 B , 所以 2 和 y_B 是上述方程得两个根即 $2y_B = \frac{4(m^2-2m+2)}{m^2+1}$

即 $y_B = \frac{2(m^2-2m+2)}{m^2+1}$ 8 分

因为 A 为 BD 的中点, 所以 $\frac{2(m^2 - 2m + 2)}{m^2 + 1} = 4$, 解得 $m = 0$ 或 $m = -2$ 10 分

所以 l 方程为 $x = 2$ 或 $x + 2y - 6 = 0$ 12 分

说明: 法 2° 中 $\Delta > 0$ 不写不扣分, 若设点斜式方程, 讨论斜率不存在可得 2 分, 余下部分酌情给分.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$, 点 M 满足 $|MF_1| + |MF_2| = 4$. 记 M 的轨迹为 C .

(1) 求 C 的方程;

(2) 直线 l 经过点 $P(-3, 0)$, 与轨迹 C 分别交于点 M, N , 与直线 $3x + 4 = 0$ 交于点 Q , 求证:

$$\frac{1}{PM} + \frac{1}{PN} = \frac{2}{PQ}.$$

解析: (1) 由椭圆定义得,

点 M 的轨迹 C 为以点 F_1, F_2 为焦点, 长轴长为 4 的椭圆, 2 分

设此椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 则由题意得 $a = 2, c = 1, b = \sqrt{3}$,

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 4 分

(2) 设点 M, N 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

由题意知直线 l 的斜率一定存在, 设为 k , 则直线 l 的方程可设为 $y = k(x + 3)$,

与椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 联立可得 $(3 + 4k^2)x^2 + 24k^2x + 36k^2 - 12 = 0$,

由韦达定理知 $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{-24k^2}{3+4k^2}, \\ x_1x_2 = \frac{36k^2-12}{3+4k^2} \end{cases}$ 6 分

所以 $PM = \sqrt{1+k^2}|x_1 - (-3)| = \sqrt{1+k^2}|x_1 + 3|$, 7 分

$PN = \sqrt{1+k^2}|x_2 - (-3)| = \sqrt{1+k^2}|x_2 + 3|$, 8 分

又因为 $x_1 > -3, x_2 > -3$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{1}{PM} + \frac{1}{PN} &= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}|x_1+3|} + \frac{1}{\sqrt{1+k^2}|x_2+3|} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}(x_1+3)} + \frac{1}{\sqrt{1+k^2}(x_2+3)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \left(\frac{x_1 + x_2 + 6}{x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \left(\frac{\frac{-24k^2}{3+4k^2} + 6}{\frac{36k^2-12}{3+4k^2} + 3\left(\frac{-24k^2}{3+4k^2}\right) + 9} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \left(\frac{18}{15} \right) = \frac{6}{5\sqrt{1+k^2}}. \end{aligned}$$
 10 分

又由题知 $x_Q = -\frac{4}{3}$,

所以 $PQ = \sqrt{1+k^2} \left| -\frac{4}{3} - (-3) \right| = \sqrt{1+k^2} \left| -\frac{4}{3} + 3 \right| = \frac{5\sqrt{1+k^2}}{3}$,

所以 $\frac{2}{PQ} = \frac{6}{5\sqrt{1+k^2}}$, 11 分

所以 $\frac{1}{PM} + \frac{1}{PN} = \frac{2}{PQ}$, 得证. 12 分

情况说明: $\Delta > 0$ 不写不扣分, 直线方程设为 $x = my - 3$ 的请视同给分, 但要对斜率为 0 的情况进行讨论, 不讨论扣 1 分.

22. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{e^x}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值;

(2) 若 $ax^2e^x + (2x+1)e^{x+1} - x \geq 0$ 对 $\forall x \in R$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

解析: (1) 对函数 $f(x)$ 求导可得: $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$ 1 分

可知当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 2 分

即可知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减. 3 分

由上可知, $f(x)$ 的极大值为 $f(1) = \frac{1}{e}$, 无极小值. 4 分

注: “无极小值” 未写不扣分

方法一: (2) 由 $ax^2e^x + (2x+1)e^{x+1} - x \geq 0$ 对 $\forall x \in R$ 恒成立.

当 $x=0$ 时, $e \geq 0$ 恒成立; 5 分

当 $x \neq 0$ 时, $ax^2e^x + (2x+1)e^{x+1} - x \geq 0$ 对 $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 恒成立可变形为: $a \geq \frac{1}{xe^x} - \frac{e(2x+1)}{x^2}$ 对

$\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 恒成立. 6 分

令 $g(x) = \frac{1}{xe^x} - \frac{e(2x+1)}{x^2}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 则 $a \geq g(x)_{\max}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

求导可得: $g'(x) = -\frac{x+1}{x^2e^x} + \frac{2e(x+1)}{x^3}$ 7 分

$$= \frac{(2e^{x+1} - x)(x+1)}{x^3e^x} = \frac{e^x \left(2e - \frac{x}{e^x} \right) (x+1)}{x^3e^x}$$

由 (1) 知 $2e > \frac{x}{e^x}$ 即 $2e - \frac{x}{e^x} > 0$ 恒成立.

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, 则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 8 分

$$g(x) = \frac{1}{xe^x} - \frac{e(2x+1)}{x^2} = \frac{x(1-2e^{x+1}) - e^{x+1}}{x^2e^x}$$

因 $x \in (0, +\infty)$, 故 $1-2e^{x+1} < 0$, 所以 $g(x) < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立. 9 分

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, 令 $g'(x) = 0$, 得 $x = -1$

当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递增

当 $x \in (-1, 0)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减

从而可知 $g(x)$ 的最大值为 $g(-1)=0$ 11 分

因此, 对 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 都有 $g(x) \leq 0$ 恒成立

所以 $a \geq 0$ 12 分

方法二: (2) 由 $ax^2e^x + (2x+1)e^{x+1} - x \geq 0$ 对 $\forall x \in R$ 恒成立可变形为: $ax^2 + 2ex + e \geq \frac{x}{e^x}$ 对 $\forall x \in R$ 恒成立.

令 $g(x) = ax^2 + 2ex + e$, 则 $g(x) \geq f(x)$ 对 $\forall x \in R$ 恒成立.

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立.

当 $a < 0$ 时, $\exists x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $g(x_0) < 0$, 与 $g(x) \geq f(x)$ 恒成立矛盾; 5 分

当 $a \geq 0$ 时, 易知 $g(x) = ax^2 + 2ex + e \geq 2ex + e$ 恒成立 6 分

考虑直线方程为 $l: y = 2ex + e$; 7 分

先证明函数 $f(x)$ 的图像始终在直线 l 的下方, 即证明:

$2ex + e \geq \frac{x}{e^x} \Leftrightarrow 2xe^{x+1} + e^{x+1} - x \geq 0$ 8 分

构造函数 $h(x) = 2xe^{x+1} + e^{x+1} - x$, 求导可得: $h'(x) = e^{x+1}(2x+3) - 1$,

令 $p(x) = e^{x+1}(2x+3) - 1$, 求导可得: $p(x) = e^{x+1}(2x+5)$,

可得 $h'(x)$ 在 $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(-\frac{5}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增. 9 分

且当 $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$ 时, $h'(x) < 0$ 恒成立, $h'(-1) = 0$.

故可得: 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $h'(x) < 0$, 当 $x \in (-1, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$,

即可知 $h(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增 10 分

从而可知 $h(x)$ 的最小值为 $h(-1) = 0$, 即有 $2ex + e \geq \frac{x}{e^x}$ 即 $ax^2e^x + (2x+1)e^{x+1} - x \geq 0$ 恒成

立 11 分

综上实数 a 的取值范围是 $[0, +\infty)$ 12 分