

苏州市 2021—2022 学年第一学期学业质量阳光指标调研卷

高二数学

2022.1.18

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 直线 $x - \frac{\pi}{3} = 0$ 的倾斜角为 ()

- A. 0 B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

2. 已知平面 α 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (2, -2, 4)$, $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, -2)$, 则 AB 所在直线 l 与平面 α 的位置关系为 ()

- A. $l \perp \alpha$ B. $l \subset \alpha$
C. l 与 α 相交但不垂直 D. $l \parallel \alpha$

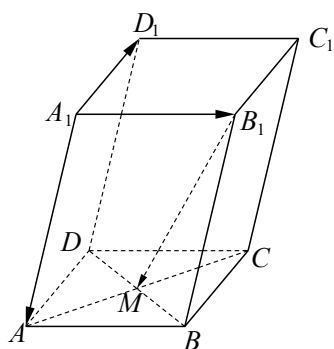
3. 若数列 $\left\{ \frac{2}{a_n + 1} \right\}$ 是等差数列, $a_1 = 1$, $a_3 = -\frac{1}{3}$, 则 $a_5 =$ ()

- A. $-\frac{7}{9}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{7}{9}$

4. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 准线为 l , M 是抛物线上一点, 过点 M 作 $MN \perp l$ 于 N . 若 $\triangle MNF$ 是边长为 2 的正三角形, 则 $p =$ ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

5. 如图, 在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, AC 与 BD 的交点为 M . 设 $\overrightarrow{A_1B_1} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{A_1D_1} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{A_1A} = \mathbf{c}$, 则下列向量中与 $\overrightarrow{B_1M}$ 相等的向量是 ()



- A. $-\frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}$ B. $-\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}$ C. $\frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}$ D. $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}$

6. 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上的点 P 到直线 $x + 2y - 9 = 0$ 的最短距离为 ()

- A. $\sqrt{5}$ B. $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{9\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{13\sqrt{5}}{5}$

7. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 - \frac{1}{2}a_1 < a_3 - \frac{1}{2}a_2 < \dots < a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} < \dots$, 则称数列 $\{a_n\}$ 为“半差递增”数列. 已知“半差递增”数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n + 2c_n = 2t - 1 (n \in \mathbb{N}^*)$, 则实数 t 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, \frac{1}{2})$ B. $(-\infty, 1)$ C. $(\frac{1}{2}, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

8. 已知线段 AB 的端点 B 在直线 $l: y = -x + 5$ 上, 端点 A 在圆 $C_1: (x+1)^2 + y^2 = 4$ 上运动, 线段 AB 的中点 M 的轨迹为曲线 C_2 , 若曲线 C_2 与圆 C_1 有两个公共点, 则点 B 的横坐标的取值范围是 ()

- A. $(-1, 0)$ B. $(1, 4)$ C. $(0, 6)$ D. $(-1, 5)$

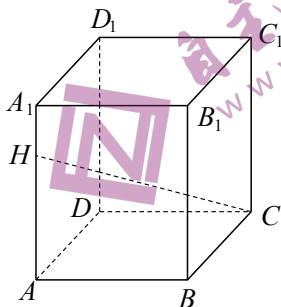
二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线 l 与双曲线右支交于点 P . 若 $|PF_1| = 2|PF_2|$, 且 $\triangle PF_1F_2$ 有一个内角为 120° , 则双曲线的离心率可能是 ()

- A. $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$ B. 2 C. $\frac{\sqrt{13}+1}{2}$ D. $\sqrt{7}$

10. 如图, 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, $\overrightarrow{AH} = t\overrightarrow{AA_1} (t \in [0, 1])$, 则下列说法正确的有 ()

- A. $\overrightarrow{CH} = t\overrightarrow{CA} + (1-t)\overrightarrow{CA_1}$ B. $\forall t \in [0, 1]$, 都有 $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$
C. $\exists t \in [0, 1]$, 使得 $\overrightarrow{DH} \parallel \overrightarrow{B_1C}$
D. 若平面 $\alpha \perp CH$, 则直线 CD 与平面 α 所成的角大于 $\frac{\pi}{4}$



11. 如图 1, 曲线 $C: (x^2 + y^2)^3 = 16x^2y^2$ 为四叶玫瑰线, 它是一个几何亏格为零的代数曲线, 这种曲线在苜蓿叶型立交桥的布局中有非常广泛的应用. 如图 2, 苜蓿叶型立交桥有两层, 将所有原来需要穿越相交道路的转向都由环形匝道来实现, 即让左转车辆驶入环道后再自右侧切向汇入主路, 四条环形匝道就形成了苜蓿叶的形状. 给出下列结论正确的是 ()

- A. 曲线 C 只有两条对称轴
B. 曲线 C 仅经过 1 个整点 (即横、纵坐标均为整数的点)
C. 曲线 C 上任意一点到坐标原点 O 的距离都不超过 2
D. 过曲线 C 上的任一点作两坐标轴的垂线与两坐标轴围成的矩形面积最大值为 2

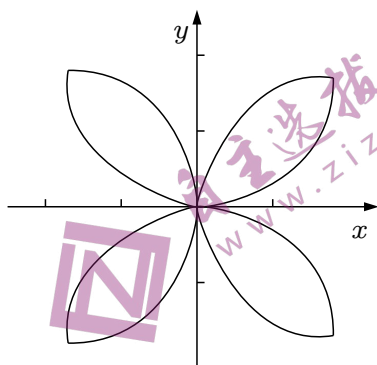


图 1



图 2

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{\lambda}{2^n}$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$), 其中 $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$, 下列说法正确的是 ()

- A. 当 $\lambda = 0$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列
 B. 当 $\lambda = -1$ 时, 数列 $\{(-2)^n a_n\}$ 是等差数列
 C. 当 $\lambda = 1$ 时, 数列 $\left\{a_n - \frac{n}{2^n}\right\}$ 是常数列
 D. 数列 $\{a_n\}$ 总存在最大项

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若 $\mathbf{a} = (1, -1, \sqrt{2})$, 则与向量 $\mathbf{a}$ 同方向的单位向量的坐标为 _____

14. 小明同学发现家中墙壁上灯光的边界类似双曲线的一支. 如图, P 为双曲线的顶点, 经过测量发现, 该双曲线的渐近线相互垂直, $AB \perp PC$, $AB = 60$ cm, $PC = 20$ cm, 双曲线的焦点位于直线 PC 上, 则该双曲线的焦距为 _____ cm.



15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 且 $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, 则 a_{2022} 的值为 _____

16. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F , 直线 l 过点 F 且与抛物线 C 交于 A, B 两点, 以 F 为圆心的圆交线段 AB 于 C, D 两点 (从上到下依次为 A, C, D, B), 若 $|AC| \cdot |BD| \geq |FC| \cdot |FD|$, 则该圆的半径 r 的取值范围是 _____

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, O 为坐标原点, 已知直线 $l_1: mx - (2-m)y - 4 = 0$ 与直线 $l_2: x + y - 2 = 0$ 的交点 M 在第一、三象限的角平分线上.

(1) 求实数 m 的值;

(2) 若点 P 在直线 l_1 上且 $|PM| = \frac{\sqrt{5}}{2}|PO|$, 求点 P 的坐标.

18. (12 分)

已知函数 $f(x) = \log_{\sqrt{2}} x$, 从下列两个条件中选择一个使得数列 $\{a_n\}$ 成等比数列.

条件 1: 数列 $\{f(a_n)\}$ 是首项为 4, 公比为 2 的等比数列;

条件 2: 数列 $\{f(a_n)\}$ 是首项为 4, 公差为 2 的等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{\frac{f(a_n)}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

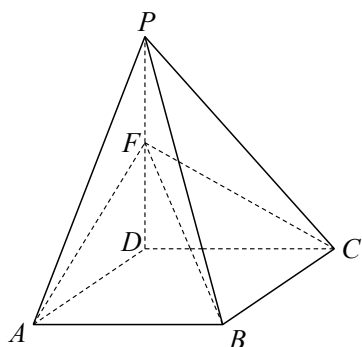
19. (12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle DAB = 60^\circ$, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 点 F 为棱 PD 的中点, 二面角 $D-FC-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

(1) 求 PD 的长;

(2) 求异面直线 BF 与 PA 所成角的余弦值;

(3) 求直线 AF 与平面 BCF 所成角的正弦值.



20. (12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} + a_n = 4n (n \in \mathbb{N}^*)$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 是否存在正实数 a , 使得不等式 $\frac{a_1}{a_1+1} \cdot \frac{a_2}{a_2+1} \cdots \frac{a_n}{a_n+1} \cdot \sqrt{a_{n+1}} < \frac{a}{2} - \frac{3}{a}$ 对一切正整数 n 都成立?

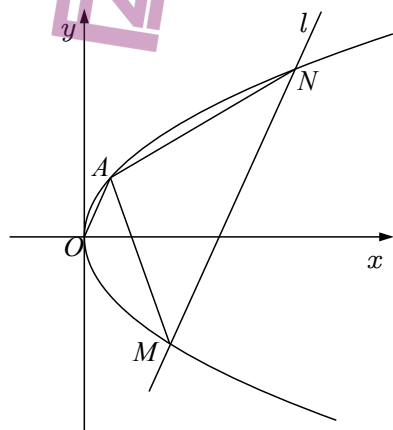
若存在, 求出 a 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

21. (12分)

如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 经过点 $A(1, 2)$, 直线 $l: y = kx + b$ 与抛物线 C 交于 M, N 两点.

(1) 若 $\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{OA}$, 求直线 l 的方程;

(2) 当 $AM \perp AN$ 时, 若对任意满足条件的实数 k , 都有 $b = mk + n$ (m, n 为常数), 求 $m + 2n$ 的值.



22. (12分)

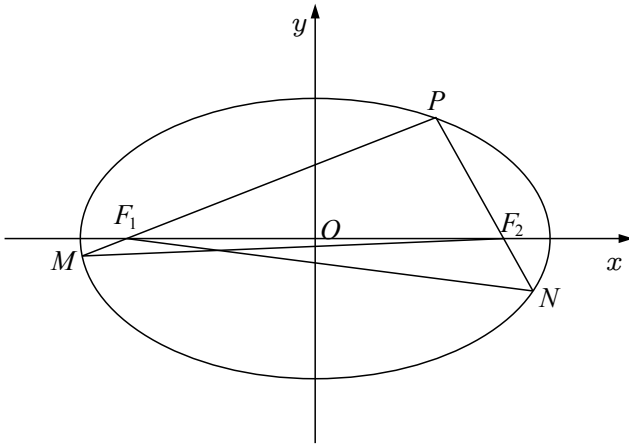
在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 点 P 是椭圆上的一动点, 且 P 在第一象限. 记 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 S , 当 $PF_2 \perp F_1F_2$ 时, $S = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

(1) 求椭圆 E 的标准方程;

(2) 如图, PF_1, PF_2 的延长线分别交椭圆于点 M, N , 记 $\triangle MF_1F_2$ 和 $\triangle NF_1F_2$ 的面积分别为 S_1 和 S_2 .

(i) 求证: 存在常数 λ , 使得 $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = \frac{\lambda}{S}$ 成立;

(ii) 求 $S_2 - S_1$ 的最大值.



自主选拔在线
www.zizzs.com



自主选拔在线
www.zizzs.com



自主选拔在线
www.zizzs.com



自主选拔在线
www.zizzs.com