

大联考长沙市一中 2024 届高三三月考试卷(一)

数学参考答案

一、选择题(本大题共 8 个小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	B	B	A	C	C	C	B

1. B 【解析】因为 $P \subseteq Q$, 则由子集的定义知集合 P 中的任何一个元素都在 Q 中, 而 Q 中元素不一定在 P 中(集合相等或不相等两种情况), 故 B 正确, ACD 错误. 故选 B.

2. B 【解析】由等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和的性质可得: $S_{10}, S_{20} - S_{10}, S_{30} - S_{20}$ 也成等比数列, $\therefore (S_{20} - S_{10})^2 = S_{10} \times (S_{30} - S_{20})$, 解得 $S_{30} = 15$. 故选 B.

3. B 【解析】 $\cos \theta = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} = -\frac{3}{5}$, 故选 B.

4. A 【解析】抛物线 $x = \frac{1}{4}y^2$ 即 $y^2 = 4x$ 的焦点坐标为 $(1, 0)$, 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 即 $bx \pm ay = 0$, 所以点 $(1, 0)$ 到直线 $bx \pm ay = 0$ 的距离为 $\frac{|b|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $b^2 = a^2$, 则双曲线的离心率为

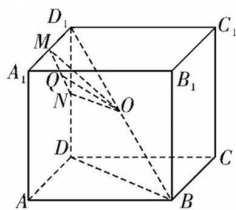
$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}. \text{ 故选 A.}$$

5. C 【解析】对于选项 A: $|a \cdot b| = |a| |b| \cos \langle a, b \rangle \leq |a| |b|$, 故 A 正确; 对于选项 B: 当 a, b 不共线时, 由向量加法的三角形法则, 可得 $|a + b| < |a| + |b|$; 当 a, b 反向共线时, 可得 $|a + b| = ||a| - |b|| < |a| + |b|$; 当 a, b 同向共线时, 可得 $|a + b| = |a| + |b|$; 综合可得 $|a + b| \leq |a| + |b|$, 故 B 正确; 对于选项 C: 与向量 a 共线的单位向量为 $\pm \frac{a}{|a|}$, 故 C 错误; 对于选项 D: 由 $\frac{b}{|b|} = e$, 易知 $\langle a, b \rangle = \langle a, e \rangle$, 所以向量 a 在向量 b 上的投影向量为 $|a| \cos \langle a, b \rangle e = (a \cdot e)e$; 故 D 正确. 综上, 故选 C.

6. C 【解析】甲、乙一定都正确, 则 $\mu = m$. 由正态分布的特点: 中间分布多, 两边分布少, 左右对称, 可知丁正确, 丙错, 故选 C.

7. C 【解析】如图, 正方体外接球的球心在中心点 O 处, 球的半径 $R = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 要使过 MN 的平面截该球得到的截面面积最小, 则截面圆的圆心为线段 MN 的中点 Q , 连接 OM, ON , 则 $OM = ON = MN = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $OQ = \sqrt{OM^2 - \left(\frac{1}{2}MN\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$, 此时

截面圆的半径 $r = \sqrt{R^2 - OQ^2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$, 此时, 截面面积的最小值 $S = \pi r^2 = \frac{3}{8}\pi$. 故选 C.



8. B 【解析】设 $g(x) = x + \frac{1}{x} - a, x \in [\frac{1}{2}, 4]$, 则 $g(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上单调递减, 在 $[1, 4]$ 上单调递增, $g(\frac{1}{2}) = \frac{5}{2} - a, g(1) = 2 - a, g(4) = \frac{17}{4} - a$, 所以 $M(a)$ 是 $|\frac{5}{2} - a|, |2 - a|, |\frac{17}{4} - a|$ 三者中的较大者,

所以 $M(a) = \begin{cases} \frac{17}{4} - a, & a \leq \frac{25}{8}, \\ a - 2, & a > \frac{25}{8}, \end{cases}$ 所以当 $a = \frac{25}{8}$ 时, $M(a)$ 的最小值为 $\frac{9}{8}$. 故选 B.

二、选择题(本大题共4个小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项是符合题目要求,全部选对的得5分,有选错的得0分,部分选对的得2分)

题号	9	10	11	12
答案	ABC	AD	ACD	ABD

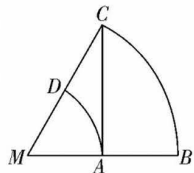
9. ABC 【解析】对于选项 A: $f(x) = \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^7$ 的二项展开式的通项为 $C_7^r (x^3)^{7-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = (-1)^r C_7^r x^{21-4r}$, $r = 0, 1, 2, \dots, 7$, 不满足 $21-4r=0$, 故没有常数项, 故 A 正确; 对于选项 B: 展开式中系数最大的项是 $C_7^4 x^{21-4 \times 4} = 35x^5$, 故 B 正确; 对于选项 C: 展开式的二项式系数之和为 $2^7 = 128$, 故 C 正确; 对于选项 D: 令 $x=1$, 可得展开式中各项的系数之和为 $0^7 = 0$, 故 D 错误. 故选 ABC.

10. AD 【解析】对于 A 选项: 圆台的全面积为 $\pi \times 1^2 + \pi \times 2^2 + \pi \times (1+2) \times 3 = 14\pi$, 故 A 正

确; 对于 B 选项: 圆台的体积为 $\frac{1}{3}(\pi \times 1^2 + \pi \times 2^2 + \pi \times \sqrt{1^2 + 2^2}) \times 2\sqrt{2} = \frac{14\sqrt{2}\pi}{3}$, 故 B 错

误; 对于 C 选项: 易知圆台的轴截面 ABCD 为等腰梯形, 其中位线为中截面圆的直径, 所以中截面圆的半径长为 $\frac{2+4}{4} = \frac{3}{2}$, 所以中截面圆的面积为 $\pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9\pi}{4}$, 故 C 错误; 对于 D

选项: 将圆台沿着轴截面 ABCD 切开, 将圆台的侧面的一半展开如图所示, 延长 BA、CD 交于点 M, 在圆台的轴截面等腰梯形 ABCD 中, $AD \parallel BC$, $AD = \frac{1}{2}BC$, 易知 A、D 分别为 BM、CM 的中点, 所以 $AM = DM = AB = 3$, 设 $\angle AMD = \theta$, 则 $\widehat{AD} = 3\theta = \pi$, 则 $\theta = \frac{\pi}{3}$, 在 $\triangle ACM$ 中, $AM = 3$, $CM = 6$, $\angle AMD = \frac{\pi}{3}$, 由余弦定理可得 $AC = \sqrt{AM^2 + CM^2 - 2AM \cdot CM \cos \frac{\pi}{3}} = \sqrt{3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \times \frac{1}{2}} = 3\sqrt{3}$, 因此, 从点 A 经过圆台的表面到点 C 的最短距离为 $3\sqrt{3}$, 故 D 正确. 故选: AD.



11. ACD 【解析】由题意, $\angle POQ = 2x$, 则 $f(x) = \frac{1}{2} \times 1^2 \times 2x - \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin 2x = x - \frac{1}{2} \sin 2x$, $x \in [0, \pi]$.

所以 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$, 故选项 A 正确; 因为 $f'(x) = 1 - \cos 2x \geq 0$, 故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[0, \pi]$, 故

选项 B 错误; 因为 $f(x) + f(\pi - x) = \pi$, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 中心对称, 故选项 C 正确; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \geq f'(x)$, 故 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, 函数 $f(x)$ 的瞬时变化率最大, 故选项 D 正确. 故选 ACD.

12. ABD 【解析】令 $m=1, n=2$, 得 $a_2 + a_4 = 2a_3 + 1$, 解得 $a_4 = 5$, 故 A 正确. 此时 $a_4 - a_2 = 3$, 令 $m=n+2$, 得 $a_{2n+4} + a_{2n} = 2a_{2n+2} + 2$, 从而 $(a_{2n+4} - a_{2n+2}) - (a_{2n+2} - a_{2n}) = 2$, 所以数列 $\{a_{2n+2} - a_{2n}\}$ 是以 3 为首项, 2 为公差的等差数列, 故 B 正确. 所以 $a_{2n+2} - a_{2n} = 2n + 1$, 所以 $a_{2n} - a_2 = (a_{2n} - a_{2n-2}) + (a_{2n-2} - a_{2n-4}) + \dots + (a_4 - a_2) = (2n-1) + (2n-3) + \dots + 3 = \frac{(n-1)(2n+2)}{2} = n^2 - 1$, 所以 $a_{2n} = n^2 + 1$, 故 C 错误. 令 $m=n+1$, 得 $a_{2n+2} + a_{2n} = 2a_{2n+1} + 1$, 所以 $a_{2n+1} = \frac{a_{2n+2} + a_{2n} - 1}{2} = n^2 + n + 1$, 又 $a_1 = 1$, 所以当 n 为奇数时, $a_n = \frac{n^2 + 3}{4}$, 故 D 正确.

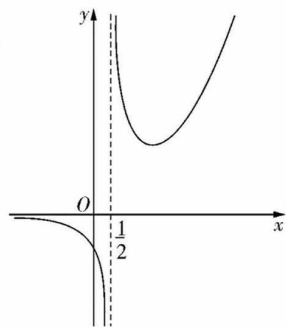
三、填空题(本大题共4个小题,每小题5分,共20分)

13. $(1, \sqrt{2} + 1)$ 【解析】若圆 C_1 与圆 C_2 有且仅有两条公切线, 则两圆相交, 圆心 $C_1(0, 0)$, 半径 $R=1$, 圆心 $C_2(1, 1)$, 半径 r , 则 $|C_1 C_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, 若两圆相交, 则满足 $r - R < |C_1 C_2| < R + r$, 即 $r - 1 < \sqrt{2} < 1 + r$, 得 $\sqrt{2} - 1 < r < \sqrt{2} + 1$, 又 $r > 1$, 故答案为: $1 < r < \sqrt{2} + 1$.

14. 9 【解析】 $\because$ 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和有最大值, $\therefore$ 等差数列 $\{a_n\}$ 为递减数列, 又 $\frac{a_6}{a_5} < -1$, $\therefore a_5 > 0, a_6 < 0$, $\therefore a_5 + a_6 < 0$, 又 $S_{10} = \frac{10(a_1 + a_{10})}{2} = \frac{10(a_5 + a_6)}{2} < 0$, $S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = 9a_5 > 0$, $\therefore$ 使 $S_n > 0$ 成立的正整数 n 的最大值是 9.

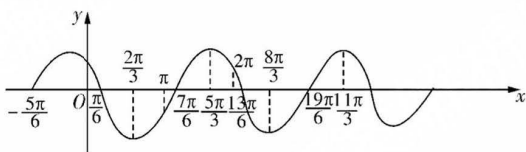


15. $\left(\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$ 【解析】显然 $x=\frac{1}{2}$ 不是 $f(x)$ 的零点, 令 $f(x)=0$ 得 $a=\frac{e^x}{2x-1}$, 设 $g(x)=\frac{e^x}{2x-1}$, 则 $g'(x)=\frac{(2x-3)e^x}{(2x-1)^2}$, 有 $g(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递减, $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 上单调递减, $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增, 当 $x=\frac{3}{2}$ 时, $g(x)$ 取得极小值 $g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}$, 作出函数 $g(x)$ 的大致图象如图所示, 结合图象可知实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$.



16. $\left(0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right]$ 【解析】解法一: 由题意可知, $f(0)=\frac{1}{2}$, 且 $0 < \varphi < \pi$, 则 $\varphi=\frac{\pi}{3}$, 又 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 上没有最值, $\frac{T}{2} \geq \pi$, 即 $0 < \omega \leq 1$, 考虑 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 上存在最值, 则 $\omega\pi + \frac{\pi}{3} < k\pi < 2\omega\pi + \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$, 即 $\frac{k}{2} - \frac{1}{6} < \omega < k - \frac{1}{3}$, 又 $0 < \omega \leq 1$, 即 $\begin{cases} \frac{k}{2} - \frac{1}{6} \leq 1, \\ k - \frac{1}{3} > 0, \end{cases}$ 即 k 可取 1, 2; 得 $\omega \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{6}, 1\right]$, 故 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 上没有最值, 可得 $\omega \in \left(0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right]$.

解法二: (基于伸缩理解, 由特殊到一般) 由题意可知, $f(0)=\frac{1}{2}$, 且 $0 < \varphi < \pi$, 则 $\varphi=\frac{\pi}{3}$, 不妨取 $\omega=1$, $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, 其大致图象如下:



由图可知, $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 上没有最值包含两种情况:

情况一: $\frac{2\pi}{3\omega} \geq 2\pi$, 得 $0 < \omega \leq \frac{1}{3}$;

情况二: $\begin{cases} \frac{2\pi}{3\omega} \leq \pi, \\ \frac{5\pi}{3\omega} \geq 2\pi, \end{cases}$ 得 $\frac{2}{3} \leq \omega \leq \frac{5}{6}$,

综上, $\omega \in \left(0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right]$.

四、解答题(本大题共 6 个小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 【解析】(1) 由题意, 可知, $CD = \frac{a \sin B}{\sin \angle ACB}$,

由正弦定理, 可得 $CD = \frac{ab}{c}$,

又因为 $c^2 = ab$, 故可得 $CD = c$ 4 分

(2) 由 $CD = c$, 故 $AD = BD = \frac{c}{2}$,

在 $\triangle ACD$ 中, $\cos \angle ADC = \frac{\frac{5}{4}c^2 - b^2}{c^2}$;

在 $\triangle BCD$ 中, $\cos \angle BDC = \frac{\frac{5}{4}c^2 - a^2}{c^2}$ 6 分



又因为 $\angle ADC + \angle BDC = \pi$, 即有 $\frac{\frac{5}{4}c^2 - b^2}{c^2} + \frac{\frac{5}{4}c^2 - a^2}{c^2} = 0$,

即 $a^2 + b^2 = \frac{5}{2}c^2$, 8 分

则 $\cos \angle ACB = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3c^2}{4ab} = \frac{3}{4}$ 10 分

18. 【解析】(1) 由题知 $a_n \neq 0$.

当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = \frac{a_1 a_2}{2}$, $a_2 = 2$; 1 分

当 $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{a_n a_{n+1}}{2} - \frac{a_{n-1} a_n}{2}$, 所以 $a_{n+1} - a_{n-1} = 2$, 3 分

所以数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是首项为 1, 公差为 2 的等差数列, 数列 $\{a_{2n}\}$ 是首项为 2, 公差也为 2 的等差数列,

$a_{2n-1} = a_1 + 2(n-1) = 2n-1$, $a_{2n} = a_2 + 2(n-1) = 2n$,

所以 $a_n = n$ 6 分

(2) 由(1)得, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, 9 分

即 $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{99} = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{100} - \sqrt{99} = 10 - 1 = 9$ 12 分

19. 【解析】(1) 证明: 因为 $PA \perp$ 平面 ABC , $BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $PA \perp BC$, 1 分

又因为 $AC \perp BC$, 而 $PA \cap AC = A$, $PA, AC \subset$ 平面 PAC ,

所以 $BC \perp$ 平面 PAC , 又 $AE \subset$ 平面 PAC , 所以 $BC \perp AE$ 2 分

又因为 $PA = AC$, 点 E 是 PC 的中点, 所以 $AE \perp PC$.

而 $PC \cap BC = C$, $PC, BC \subset$ 平面 PBC , 所以 $AE \perp$ 平面 PBC , $PB \subset$ 平面 PBC , 所以 $AE \perp PB$, 3 分

又 $PB \perp EF$, $AE \cap EF = E$, $AE, EF \subset$ 平面 AEF ,

所以 $PB \perp$ 平面 AEF 6 分

(2) 解法一: 设 $BC = \lambda (\lambda > 0)$, 由(1)得, $AE = PE = CE = \sqrt{2}$, 可知 $AB = \sqrt{4 + \lambda^2}$, $PB = \sqrt{8 + \lambda^2}$,

由 $\triangle PFE \sim \triangle PCB$, 得 $\frac{PE}{PB} = \frac{EF}{BC}$, 故 $EF = \frac{\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{8 + \lambda^2}}$,

在 $\text{Rt} \triangle PFE$ 中, $PF = \sqrt{PE^2 - EF^2} = \frac{4}{\sqrt{8 + \lambda^2}}$,

所以 $V_{P-AEF} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle AEF} \times PF = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{8 + \lambda^2}} \right) \times \frac{4}{\sqrt{8 + \lambda^2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$,

化简得 $(\lambda - 2\sqrt{2})^2 = 0$, 解得 $\lambda = 2\sqrt{2}$. 故 $EF = 1$ 9 分

由(1)知 $PF \perp$ 平面 AEF , 故 $\angle PEF$ 即为所求角,

在 $\text{Rt} \triangle PFE$ 中, $\cos \angle PEF = \frac{EF}{PE} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 又 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right]$, 故 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 12 分

解法二: 设 $BC = \lambda (\lambda > 0)$, 由(1)得, $AE = PE = CE = \sqrt{2}$, 可知 $AB = \sqrt{4 + \lambda^2}$, $PB = \sqrt{8 + \lambda^2}$,

由 $\triangle PFE \sim \triangle PCB$, 得 $\frac{PE}{PB} = \frac{EF}{BC}$, 故 $EF = \frac{\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{8 + \lambda^2}}$,

在 $\text{Rt} \triangle PFE$ 中, $PF = \sqrt{PE^2 - EF^2} = \frac{4}{\sqrt{8 + \lambda^2}}$,

所以 $V_{P-AEF} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle AEF} \times PF = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{8 + \lambda^2}} \right) \times \frac{4}{\sqrt{8 + \lambda^2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$,

化简得 $(\lambda - 2\sqrt{2})^2 = 0$, 解得 $\lambda = 2\sqrt{2}$ 9 分

如图, 以 A 为原点, 与 AC 垂直的方向, 射线 AC , 射线 AP 分别为 x, y, z 轴的正半轴, 建立空间直角坐标系.

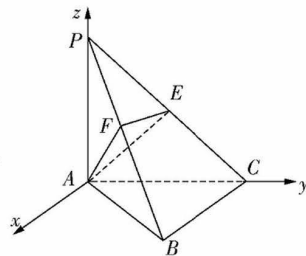
因为 $PA=AC=2, BC=2\sqrt{2}$, 则 $A(0,0,0), P(0,0,2), B(2\sqrt{2},2,0), C(0,2,0)$,
 $\overrightarrow{PB}=(2\sqrt{2},2,-2), \overrightarrow{PC}=(0,2,-2)$,

由(1)知, $PB \perp$ 平面 AEF , 所以 $\overrightarrow{PB}=(2\sqrt{2},2,-2)$ 是平面 AEF 的一个法向量,
 10 分

设直线 PC 与平面 AEF 所成角为 θ ,

$$\sin \theta = \left| \frac{\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PB}| \cdot |\overrightarrow{PC}|} \right| = \left| \frac{8}{4 \times 2\sqrt{2}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 又 } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ 故 } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

..... 12 分



20. 【解析】(1) 因为发射 II 型号炮弹三发至少击中一发的对立事件是一发都未击中, 且每发炮弹击中与否相互独立, 所以发射 II 型号炮弹三发至少击中一发的概率为 $1-(1-q)^3$,

所以 $1-(1-q)^3 \geq 0.936$, 解得 $q \geq 0.6$, 又 $0 < q < 1$, 所以 $0.6 \leq q < 1$ 4 分

(2) 选用 II 型号炮弹使得目标飞行物坠毁的概率更大, 理由如下:

记事件 M = “发射 I 型号炮弹使得目标飞行物坠毁”, A_i = “发射 I 型号炮弹击中 i 发” ($i=0,1,2,3$),

$$\begin{aligned} P(M) &= P(A_1)P(M|A_1) + P(A_2)P(M|A_2) + P(A_3)P(M|A_3) \\ &= C_3^1 p(1-p)^2 \times 0.6 + C_3^2 p^2(1-p) + C_3^3 p^3 = -0.2p^3 - 0.6p^2 + 1.8p, \end{aligned}$$

记事件 N = “发射 II 型号炮弹使得目标飞行物坠毁”, B_j = “发射 II 型号炮弹击中 j 发” ($j=0,1,2,3$),

$$\begin{aligned} P(N) &= P(B_1)P(N|B_1) + P(B_2)P(N|B_2) + P(B_3)P(N|B_3) \\ &= C_3^1 q(1-q)^2 \times 0.4 + C_3^2 q^2(1-q) \times 0.8 + C_3^3 q^3 = -0.2q^3 + 1.2q = 0.2p^3 - 0.6p^2 - 0.6p + 1, \end{aligned}$$

$$P(N) - P(M) = 0.4p^3 - 2.4p + 1, 0 < p \leq 0.4,$$

$$\text{设 } f(p) = 0.4p^3 - 2.4p + 1, 0 < p \leq 0.4,$$

$$f'(p) = 1.2p^2 - 2.4 = 1.2(p^2 - 2) < 0, \text{ 所以 } f(p) \text{ 在区间 } (0, 0.4] \text{ 上单调递减,}$$

$$\text{因为 } f(0.4) = 0.4^3 - 2.4 \times 0.4 + 1 = 0.4^3 - 0.96 + 1 > 0, \text{ 11 分}$$

所以当 $p \in (0, 0.4]$ 时, $P(N) - P(M) > 0$, $\therefore P(N) > P(M)$,

所以选用 II 型号炮弹使得目标飞行物坠毁的概率更大. 12 分

$$21. \text{【解析】(1) 依题意 } \begin{cases} a-c=1, \\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2}, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases} \text{ 解得 } a=2, b=\sqrt{3},$$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 4 分

(2) 因为 AE 不与坐标轴垂直, 可设 AE 的直线方程为 $x=my+t (m \neq 0)$,

设点 $A(x_1, y_1) (y_1 \neq 0), E(x_2, y_2)$, 则 $B(x_1, -y_1)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} x=my+t, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \text{ 得 } (3m^2+4)y^2 + 6mty + 3t^2 - 12 = 0,$$

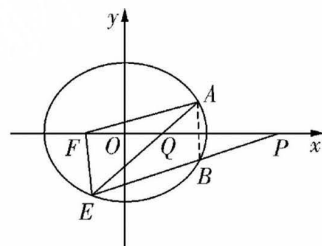
$$\text{则 } \Delta = 48(3m^2 - t^2 + 4) > 0, y_1 + y_2 = \frac{-6mt}{3m^2+4}, y_1 y_2 = \frac{3t^2-12}{3m^2+4}, \text{ 6 分}$$

因为点 P, B, E 三点共线且斜率一定存在,

$$\text{所以 } \frac{y_2+y_1}{x_2-x_1} = \frac{-y_1}{x_1-4}, \text{ 所以 } x_1 y_2 + x_2 y_1 = 4(y_1 + y_2),$$

$$\text{将 } x_1=my_1+t, x_2=my_2+t \text{ 代入, 化简可得 } \frac{y_1+y_2}{y_1 y_2} = \frac{2m}{4-t},$$

$$\text{故 } \frac{2m}{4-t} = \frac{-6mt}{3t^2-12}, \text{ 解得 } t=1, \text{ 满足 } \Delta = 48(3m^2+3) > 0, \text{ 8 分}$$



所以直线 AE 过定点 $Q(1,0)$, 且 Q 为椭圆右焦点, 设所求内切圆半径为 r , 因为 $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \times 4a \cdot r = 4r$,

$$\text{所以 } r = \frac{S_{\triangle AEF}}{4} = \frac{S_{\triangle FQA} + S_{\triangle FQE}}{4} = \frac{\frac{1}{2} |FQ| \cdot |y_1 - y_2|}{4} = \frac{\sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2}}{4} = \frac{3\sqrt{m^2 + 1}}{3m^2 + 4}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{令 } u = \sqrt{m^2 + 1} (u > 1), \text{ 则 } m^2 = u^2 - 1, \text{ 所以 } r = \frac{3u}{3u^2 + 1} = \frac{3}{3u + \frac{1}{u}},$$

因为 $u > 1$, 对勾函数 $y = 3u + \frac{1}{u}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{所以 } 3u + \frac{1}{u} > 4, \text{ 则 } 0 < r < \frac{3}{4}.$$

所以 $\triangle AEF$ 内切圆半径 r 的范围为 $(0, \frac{3}{4})$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

22. 【解析】(1) 当 $a = -1$ 时, $f(x) = e^{x-1}$,

$$\text{令 } h(x) = f(x) - g(x) = e^{x-1} - \ln(x+1), x > -1, \text{ 则 } h'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x+1},$$

$$\text{令 } m(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x+1}, \text{ 因为 } m'(x) = e^{x-1} + \frac{1}{(x+1)^2} > 0,$$

所以 $m(x)$ 在区间 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $m(0) = \frac{1}{e} - 1 < 0, m(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$,

所以存在 $x_0 \in (0, 1)$, 满足 $e^{x_0-1} = \frac{1}{x_0+1}$, $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

当 $x \in (-1, x_0)$ 时, $m(x) < 0, h(x)$ 单调递减; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $m(x) > 0, h(x)$ 单调递增;

$$\text{则当 } x = x_0 \text{ 时, } h(x) \text{ 取得最小值, 可得 } h(x_0) = e^{x_0-1} - \ln(x_0+1) = \frac{1}{x_0+1} + x_0 - 1 = \frac{1}{x_0+1} + x_0 + 1 - 2 > 0,$$

所以当 $a = -1$ 时, $f(x) > g(x)$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 设公切线 l 与两函数的图象分别相切于点 $A(x_1, e^{x_1+a})$ 和点 $B(x_2, \ln(x_2+1))$,

$$\text{因为 } f'(x) = e^{x+a}, g'(x) = \frac{1}{x+1},$$

所以直线 l 的方程可表示为 $y - e^{x_1+a} = e^{x_1+a}(x - x_1)$ 或 $y - \ln(x_2+1) = \frac{1}{x_2+1}(x - x_2)$, $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$$\text{则有 } e^{x_1+a} = \frac{1}{x_2+1}, \textcircled{1}$$

$$(1-x_1)e^{x_1+a} = \ln(x_2+1) - \frac{x_2}{x_2+1} = \ln(x_2+1) + \frac{1}{x_2+1} - 1, \textcircled{2}$$

$$\text{由 } \textcircled{1} \text{ 可得 } x_1 = -\ln(x_2+1) - a, \text{ 代入 } \textcircled{2} \text{ 可得 } [a+1+\ln(x_2+1)] \frac{1}{x_2+1} = \ln(x_2+1) + \frac{1}{x_2+1} - 1,$$

$$\text{即 } a = x_2 \ln(x_2+1) - (x_2+1), \text{ 令 } t = x_2+1, t \in (0, +\infty), \text{ 则 } a = (t-1) \ln t - t,$$

$$\text{令 } w(t) = (t-1) \ln t - t, \text{ 则 } w'(t) = \ln t - \frac{1}{t},$$

$$w'(t) \text{ 在区间 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增, } w'(1) = -1 < 0, w'(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} > 0,$$

故存在 $t_0 \in (1, 2)$, 使得 $\ln t_0 = \frac{1}{t_0}$, $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$w(t) = (t-1) \ln t - t$ 在区间 $(0, t_0)$ 上单调递减, 在区间 $(t_0, +\infty)$ 上单调递增.

$w(t_0) = (t_0-1) \ln t_0 - t_0 = 1 - (t_0 + \frac{1}{t_0}) \in (-\frac{3}{2}, -1)$, 当 t 趋近于 0 或者正无穷大时, $w(t)$ 均趋向于正无穷大.

又 a 为整数, 所以 $a \geq -1$, 故所求整数 a 的最小值是 -1 . $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线