厦门市2023届高三毕业班第四次质量检测
数学试题

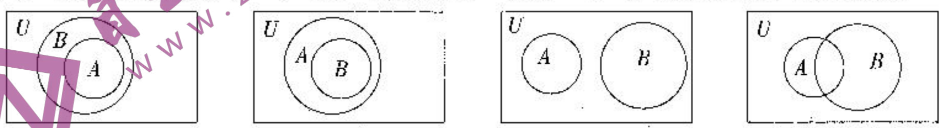
满分:150分　　考试时间:120分钟

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的准考证号、姓名填写在答题卡上。考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的"准考证号、姓名、考试科目"与考生本人准考证号、姓名是否一致。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将答题卡交回。

一、单选题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 全集 $U=\mathbf{R}$,能表示集合 $A=\{-2,-1,0\}$ 和 $B=\{x\mid x^2-x-2\leqslant 0\}$ 关系的 Venn 图是



A　　　　B　　　　C　　　　D

2. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n, $S_9=18$, $S_3=3$,则 $S_6=$

A. 9　　B. $\dfrac{21}{2}$　　C. 12　　D. $\dfrac{27}{2}$

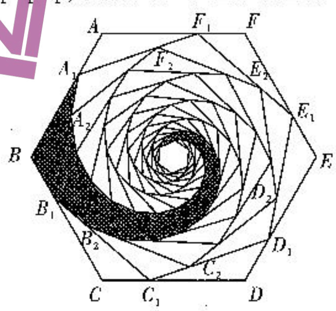
3. 平面上的三个力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$ 作用于同一点,且处于平衡状态.已知 $\boldsymbol{F}_1=(1,0)$, $|\boldsymbol{F}_2|=2$, $\langle\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2\rangle=120^\circ$,则 $|\boldsymbol{F}_3|=$

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

4. 右图中阴影部分是一个美丽的螺旋线型图案,其画法是:取正六边形 $ABCDEF$ 各边的三等分点 A_1,B_1,C_1,D_1,E_1,F_1,作第2个正六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$,然后再取正六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 各边的三等分点 A_2,B_2,C_2,D_2,E_2,F_2,作第3个正六边形 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$,依此方法,如果这个作图过程可以一直继续下去,由 $\triangle A_1BB_1$, $\triangle A_2B_1B_2$, …构成右图阴影部分所示的螺旋线型图案.则该螺旋线型图案的面积与正六边形 $ABCDEF$ 的面积的比值趋近于

A. $\dfrac{1}{12}$　　B. $\dfrac{1}{6}$

C. $\dfrac{\sqrt{7}}{9}$　　D. $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$



(第4题图)

5. 已知 $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$,则 $\sin\alpha=$

A. 0　　B. $\pm\dfrac{\sqrt{21}}{7}$　　C. $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. 甲、乙、丙、丁、戊共5名同学进行劳动技能比赛,决出第1名到第5名的名次,甲和乙去询问成绩,回答者对甲说:"很遗憾,你没有得到冠军",对乙说:"你不是最后一名",从这两个回答分析,5人名次的不同排列情况共有

A. 72种　　B. 78种　　C. 96种　　D. 102种

7. 函数$f(x)$,$g(x)$定义域均为$\mathbf{R}$,且$f(x)+g(1-x)=4$,$g(x)-f(3-x)=2$,若$g(x)$为偶函数,$g(0)=2$,则$\sum\limits_{i=1}^{13}f(i)=$

A. 10　　B. 13　　C. 14　　D. 39

8. 一封闭圆台上、下底面半径分别为1,4,母线长为6. 该圆台内有一个球,则这个球表面积的最大值是

A. $\frac{64}{3}\pi$　　B. 25π　　C. 27π　　D. $\frac{256\sqrt{3}}{27}\pi$

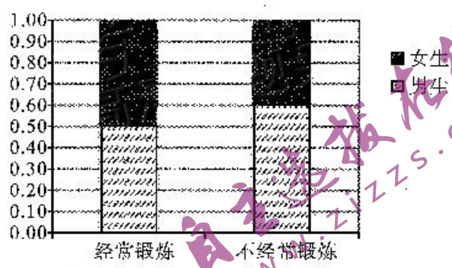
二、多选题:本题共4小题,每小题5分,共20分. 在每小题给出的四个选项中,有多个选项符合题目要求,全部选对的得5分,选对但不全的得2分,有选错的得0分.

9. 已知函数$f(x)=x^2-\ln|x|$,则

A. 曲线$y=f(x)$关于y轴对称　　B. 曲线$y=f(x)$关于原点对称

C. $f(x)$在$(-1,0)$上单调递减　　D. $f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增

10. 为了有针对性地提高学生体育锻炼的积极性,某中学需要了解性别因素是否对本校学生体育锻炼的经常性有影响,随机抽取了300名学生,对他们是否经常锻炼的情况进行了调查,调查发现经常锻炼人数是不经常锻炼人数的2倍,绘制其等高堆积条形图,如图所示,则



(第10题图)

A. 参与调查的男生中经常锻炼的人数比不经常锻炼的人数多

B. 从参与调查的学生中任取一人,已知该生为女生,则该生经常锻炼的概率为$\frac{5}{7}$

C. 依据$\alpha=0.1$的独立性检验,认为性别因素影响学生体育锻炼的经常性,该推断犯错误的概率不超过0.1

D. 假设调查人数为600人,经常锻炼人数与不经常锻炼人数的比例不变,统计得到的等高堆积条形图也不变,依据$\alpha=0.05$的独立性检验,认为性别因素影响学生体育锻炼的经常性,该推断犯错误的概率不超过0.05

附:$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $\frac{300\times(100\times60-40\times100)^2}{140\times160\times200\times100}\approx2.679$.

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

11. 在四面体 $ABCD$ 中，$AB=CD=2\sqrt{5}$，$AC=BD=5$，$AD=BC=\sqrt{13}$，同时平行于 AD，BC 的平面 α 分别与棱 AB，BD，CD，CA 交于 E，F，G，H 四点，则

A. $EF/\!/AD$　　B. $BC\perp AD$

C. 四边形 $EFGH$ 的周长为定值　　D. 四边形 $EFGH$ 的面积最大值是 3

12. 抛物线 $\Gamma: x^2=4y$，P 是 Γ 上的点，直线 $l: y=kx+4(k\neq 0)$ 与 Γ 交于 A，B 两点，过 Γ 的焦点 F 作 l 的垂线，垂足为 Q，则

A. $|PF|$ 的最小值为 1　　B. $|PQ|$ 的最小值为 1

C. $\angle AFB$ 为钝角　　D. 若 $\angle PFA=\angle PFB$，直线 PF 与 l 的斜率之积为 $-\frac{5}{2}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若 $2i(x+i)=y+4i(x,y\in\mathbf{R})$，则 $x+y=$ ___▲___.

14. 写出同时满足下列条件的一条直线 l 的方程 ___▲___.

①直线 l 在 y 轴上的截距为 1；②直线 l 与双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 只有一个公共点.

15. 已知 $f(x)=\sin(2x+\varphi)\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$，将 $f(x)$ 图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后得到 $g(x)$ 的图象，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于 y 轴对称，则 $\varphi=$ ___▲___.

16. 函数 $f(x)=\begin{cases}\cos\pi x, 0<x<a,\\ x^2-4ax+8, x\geqslant a.\end{cases}$ 当 $a=1$ 时，$f(x)$ 的零点个数为 ___▲___；若 $f(x)$ 恰有 4 个零点，则 a 的取值范围是 ___▲___.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $2b\cos C=2a+c$.

(1) 求 B；

(2) 若 $b=\sqrt{7}$，$c=2a$，D 是 AC 上一点，BD 为角 B 的平分线，求 BD.

18. (12 分)

数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，记 $T_n=a_1a_2a_3\cdots a_n$，$\{T_n\}$ 是公差为 1 的等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

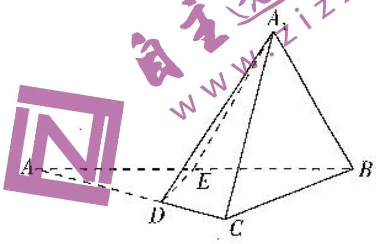
(2) 令 $b_n=\frac{na_n}{2^n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

19.(12 分)

如图,在$\triangle ABC$中,$\angle ACB=90°$,$AB=2BC=12$,E是AB的中点,D在AC上,$DE\perp AB$. 以DE为折痕把$\triangle ADE$折起,使点A到达点A_1的位置,且二面角A_1-DE-B的大小为$60°$.

(1)求证:$A_1C\perp BE$;

(2)求直线A_1E与平面A_1CD所成角的正弦值.



20.(12 分)

已知A,B分别为椭圆$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的上顶点和右顶点,$|AB|=\sqrt{5}$,$F$为$\Gamma$的左焦点,$\angle AFB=30°$.

(1)求Γ的方程;

(2)设直线AC,BD与Γ的另一个交点分别为C,D,$AC/\!/BD$. O为坐标原点,判断$\triangle OCD$面积是否可能大于1,并说明理由.

21.(12 分)

甲、乙、丙、丁四支球队进行单循环小组赛,比赛分三轮,每轮两场比赛,具体赛程如下表:

第一轮	甲 VS 乙	丙 VS 丁
第二轮	甲 VS 丙	乙 VS 丁
第三轮	甲 VS 丁	乙 VS 丙

规定:每场比赛获胜的球队记3分,输的球队记0分,平局两队各记1分,三轮比赛结束后以总分排名. 总分相同的球队以抽签的方式确定排名,排名前两位的球队出线. 假设甲、乙、丙三支球队水平相当,彼此间胜、负、平的概率均为$\frac{1}{3}$,丁的水平较弱,面对其他任意一支球队胜、负、平的概率都分别为$\frac{1}{6},\frac{1}{2},\frac{1}{3}$. 每场比赛结果相互独立.

(1)求丁的总分为7分的概率;判断此时丁能否出线,并说明理由;

(2)若第一轮比赛结束,甲、乙、丙、丁四支球队积分分别为3,0,3,0,求丁以6分的成绩出线的概率.

22.(12 分)

已知函数$f(x)=\frac{e^{x-1}}{ax}+\ln x-x$.

(1)若$a=1$,求$f(x)$的极值;

(2)若$f(x)$有三个极值点x_1,x_2,x_3,$x_1<x_2<x_3$,且$\sqrt{x_1x_3}\leqslant\sqrt{2}\ln 2$,求$a$的最小值.

厦门市2023届高三毕业班第四次质量检测

数学参考答案

一、选择题： 1~4：DACB　　5~8：ABCA

二、多选题： 9．AD　　10．ABD　　11．ACD　　12．ACD

8．提示：圆台得高 $h=\sqrt{6^2-(4-1)^2}=3\sqrt{3}$，将圆台补成圆锥，由相似比 $1:4$ 知轴截面是边长为 8 的等边三角形，此时该圆锥内切球半径 $r=\frac{1}{3}\sqrt{8^2-4^2}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$，此时 $2r<h$，所以该球半径最大时 $r=\frac{4}{3}\sqrt{3}$，对应情形为：与下底面和侧面相切，不与上底面相切，其表面积为 $\frac{64}{3}\pi$．

12．提示：A．设 $P(x_0,y_0)$ 所以 $|PF|=y_0+1$，因为 $y_0\geq 0$，所以 $|PF|_{\min}=1$．A 正确

B．设 $E(0,1)$，$\overrightarrow{QF}\cdot\overrightarrow{QE}=0$，所以 Q 点轨迹为 $x^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{9}{4}(x\neq 0)$，设 $R(0,\frac{5}{2})$，

设 $P(x_0,\frac{x_0^2}{4})$，$|PQ|_{\min}=|PR|_{\min}-\frac{3}{2}$，又因为

$|PR|=\sqrt{x_0^2+(\frac{x_0^2}{4}-\frac{5}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{16}(x_0-2)^2+6}\geq\sqrt{6}$，所以 $|PQ|_{\min}=\sqrt{6}-\frac{3}{2}$，B 错误

C．设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，又因为 $\begin{cases}y=kx+4\\ x^2=4y\end{cases}$，所以 $x^2-4kx-16=0$，

$\Delta>0,x_1+x_2=4k,x_1x_2=-16$，所以 $y_1y_2=\frac{(x_1x_2)^2}{16}=1$，又因为

$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=x_1x_2+(y_1-1)(y_2-1)=x_1x_2+y_1y_2-(y_1+y_2)+1=-4k^2-7<0$，

所以 $\angle AFB$ 为钝角，C 正确（或者由 $OA\perp OB,\angle AFB>\angle AOB$）

D．设 $P(x_0,y_0)$，因为 $\angle PFA=\angle PFB$，所以 $\frac{\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FP}}{|\overrightarrow{FA}|}=\frac{\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FP}}{|\overrightarrow{FB}|}$，

所以 $\frac{x_0x_1+(y_1-1)(y_0-1)}{y_1+1}=\frac{x_0x_2+(y_2-1)(y_0-1)}{y_2+1}$，

所以 $x_0x_1(y_2+1)+(y_1-1)(y_2+1)(y_0-1)=x_0x_2(y_1+1)+(y_2-1)(y_1+1)(y_0-1)$

所以 $x_0x_1y_2+x_0x_1+(y_0-1)(y_1y_2-y_2+y_1+1)=x_0x_2y_1+x_0x_2+(y_0-1)(y_1y_2+y_2-y_1+1)$

所以 $\frac{x_0}{4}x_1x_2(x_2-x_1)+x_0(x_1-x_2)+\frac{1}{2}(y_0-1)(x_1^2-x_2^2)=0$，又因为 $x_1\neq x_2$，

所以 $5x_0+\frac{(x_1+x_2)}{2}(y_0-1)=0$，即 $5x_0+2k(y_0-1)=0$，即 $k_1\cdot k=-\frac{5}{2}$，D 正确

三、填空题：

1

13．0　　14．$y=\pm\frac{1}{2}x+1$，$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x+1$（写出其中一条直线方程）

15．$\frac{\pi}{3}$　　16．1；$\left(\frac{3}{2},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right]\cup\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right]$

16．提示：第一空：当$a=1$时，当$0<x<1$时，$f(x)=\cos\pi x=0$，解得$x=\frac{1}{2}$；

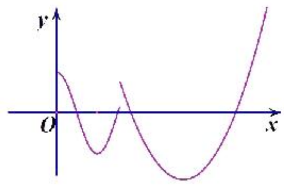
当$x\geq 1$时，$f(x)=x^2-4x+8=(x-2)^2+4>0$，无零点.

故此时$f(x)$的零点个数是1；

第二空：显然，$y=x^2-4ax+8(x\geq a)$至多有2个零点，

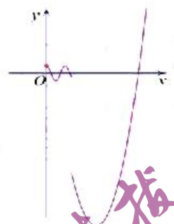
故$y=\cos\pi x$在$(0,a)$上至少有2个零点，所以$a>\frac{3}{2}$，

①若$y=\cos\pi x(0<x<a)$恰有2个零点，则$\frac{3}{2}<a\leq\frac{5}{2}$，



此时$y=x^2-4ax+8(x\geq a)$恰有两个零点，

所以$\begin{cases}2a>a,\\ \Delta=16a^2-32>0,\\ f(a)=-3a^2+8\geq 0\end{cases}$　解得$\sqrt{2}<a\leq\frac{2\sqrt{6}}{3}$，



此时$\frac{3}{2}<a\leq\frac{2\sqrt{6}}{3}$；

②若$y=\cos\pi x(0<x<a)$恰有3个零点，则$\frac{5}{2}<a\leq\frac{7}{2}$，

此时$f(a)=8-3a^2<0$，所以$y=x^2-4ax+8(x\geq a)$恰有1个零点，符合要求.

③当$a>\frac{7}{2}$时，$f(a)=8-3a^2<0$，所以$y=x^2-4ax+8(x\geq a)$恰有1个零点，

而$y=\cos\pi x(x<a)$至少有4个零点，

此时$f(x)$至少有5个零点，不符合要求，舍去.

综上，$\frac{3}{2}<a\leq\frac{2\sqrt{6}}{3}$或$\frac{5}{2}<a\leq\frac{7}{2}$.

四、解答题：共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．本题考查正弦定理、余弦定理、三角形的面积公式和三角恒等变换等基础知识；考查运算求解、推理论证能力；考查数形结合、化归与转化思想等．本题满分10分．

解：（1）由题意得$2\sin B\cos C=2\sin A+\sin C$ -- 1分

所以$2\sin B\cos C=2\sin(B+C)+\sin C$ -- 2分

即$2\sin B\cos C=2\sin B\cos C+2\cos B\sin C+\sin C$ -- 3分

2

所以 $2\cos B\sin C+\sin C=0$ -- 4 分

因为 $B,C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C\neq 0$，所以 $\cos B=-\frac{1}{2}$，所以 $B=\frac{2\pi}{3}$ ---------------- 5 分

（2）$\triangle ABC$ 中，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$c=2a$，$B=\frac{2\pi}{3}$，---------------- 6 分

所以 $7=a^2+4a^2+2a^2$，所以 $a=1,c=2$，---------------------------------- 7 分

又因为 BD 为角 B 的平分线，$S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}=S_{\triangle ABC}$ ---------------------- 8 分

所以 $\frac{1}{2}BD\cdot c\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}BD\cdot a\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}a\cdot c\cdot\sin\frac{2\pi}{3}$ ------------------------ 9 分

所以 $BD=\frac{2}{3}$ -- 10 分

18．本题考查数列递推关系、数列通项、数列求和等基础知识；考查运算求解、推理论证能力；考查函数与方程思想、化归与转化思想等．本题满分 12 分．

解：（1）当 $n=1$ 时，$T_1=a_1=2$

所以 $T_n=T_1+(n-1)\times 1=n+1$ -- 1 分

所以 $a_1a_2a_3\cdots a_n=n+1$

当 $n\geq 2$ 时，$a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}=n$ ------------------------------------ 2 分

所以 $a_n=\frac{n+1}{n}(n\geq 2)$ -- 3 分

又 $a_1=2$ 符合 $a_n=\frac{n+1}{n}$ -- 4 分

所以 $a_n=\frac{n+1}{n}$ -- 5 分

（2）由（1）得 $b_n=\frac{n+1}{2^n}$ -- 6 分

所以 $S_n=\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{n+1}{2^n}$ ……①

所以 $\frac{1}{2}S_n=\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}$ ……② ---------------------- 7 分

①-②得 $\frac{1}{2}S_n=\frac{2}{2}+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n})-\frac{n+1}{2^{n+1}}$ -------------------- 8 分

$$=1+\frac{\frac{1}{4}\left[1-(\frac{1}{2})^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n+1}{2^{n+1}}$$ ---------------------------------- 10 分

$$=\frac{3}{2}-(\frac{1}{2})^n-\frac{n+1}{2^{n+1}}$$

所以 $S_n=3-\frac{n+3}{2^n}$ -- 12 分

19．本题考查直线与平面的位置关系、空间角、空间向量等基础知识；考查空间想象、运算求解、推理论证能力；考查数形结合思想、化归与转化思想等．本题满分 12 分．

解：（1）依题 $DE\perp BE,DE\perp A_1E,BE\cap A_1E=E$，所以 $DE\perp$ 平面 A_1EB，---------- 1 分

3

则 $\angle A_1EB$ 为二面角 A_1-DE-B 的平面角，即 $\angle A_1EB=60^{\circ}$，------------------------------ 2 分

因为 $EA_1=EB$，所以 $\triangle BEA_1$ 为等边三角形，

取 BE 中点 O，连接 OA_1，OC，CE，则 $BE\perp A_1O$，------------------------------ 3 分

因为 $BC=BE=CE$，所以 $BE\perp OC$，

又 $OC\cap OA_1=O$，所以 $BE\perp$ 平面 OCA_1，------------------------------ 4 分

又 $A_1C\subset$ 平面 OCA_1，

所以 $BE\perp A_1C$ ------------------------------ 5 分

（2）因为 $DE\perp EB, DE\perp A_1E, EB\cap A_1E=E$，

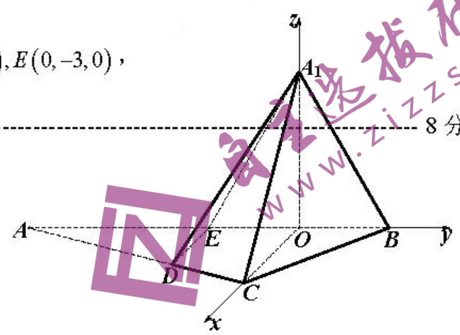
所以 $DE\perp$ 面 A_1EB，从而 $DE\perp A_1O$ ------------------------------ 6 分

因为 $DE\perp BE$，$BE\perp OC$，所以 $DE/\!/CO$，所以 $CO\perp A_1O$，

所以 OC, OB, OA_1 两两垂直

以 O 为原点，以 $\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA_1}$ 的方向分别为 x,y,z 轴的正方向，

建立空间坐标系 $O-xyz$，如图所示 ------------------------------ 7 分



则 $A_1\left(0,0,3\sqrt{3}\right), C\left(3\sqrt{3},0,0\right), D\left(2\sqrt{3},-3,0\right), E\left(0,-3,0\right)$，

所以 $\overrightarrow{EA_1}=\left(0,3,3\sqrt{3}\right)$，------------------------------ 8 分

$\overrightarrow{A_1C}=\left(3\sqrt{3},0,-3\sqrt{3}\right), \overrightarrow{CD}=\left(-\sqrt{3},-3,0\right)$

设平面 A_1CD 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x-z=0,\\ -\sqrt{3}x-3y=0\end{cases}$，

令 $y=1$，则平面 A_1CD 的一个法向量 $\vec{n}=\left(-\sqrt{3},1,-\sqrt{3}\right)$，------------------------------ 10 分

设直线 A_1E 与平面 A_1CD 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{EA_1},\vec{n}>\right|=\left|\dfrac{0+3-9}{6\times\sqrt{7}}\right|=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，

则直线 A_1E 与平面 A_1CD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$. -- 12 分

20．本题考查椭圆的简单几何性质、直线与椭圆的位置关系等基础知识；考查运算求解、逻辑思维能力；考查数形结合思想、化归与转化思想等．本题满分 12 分．

解：（1）依题 $\tan\angle AFB=\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$|AB|^2=a^2+b^2=5$，结合 $a^2=b^2+c^2$ ------------ 2 分

得 $\begin{cases}a^2=4\\ b^2=1\\ c^2=3\end{cases}$，所以 $\Gamma:\frac{x^2}{4}+y^2=1$. -- 4 分

（2）$\triangle OCD$ 的面积不可能大于 1. 理由如下： -- 5 分

依题设直线 $AC: y=kx+1$，$BD: y=k(x-2)$，$(k\neq 0)$.

设 $C(x_C,y_C)$，$D(x_D,y_D)$

由 $\begin{cases}y=kx+1\\ x^2+4y^2=4\end{cases}$，得 $(1+4k^2)x^2+8kx=0$，所以 $x_C=\frac{-8k}{1+4k^2}$，

从而 $C\left(\frac{-8k}{1+4k^2},\frac{1-4k^2}{1+4k^2}\right)$. -- 6 分

由 $\begin{cases}y=k(x-2)\\ x^2+4y^2=4\end{cases}$，得 $(1+4k^2)x^2-16k^2x+16k^2-4=0$，所以 $2x_D=\frac{16k^2-4}{1+4k^2}$，

从而 $D\left(\frac{8k^2-2}{1+4k^2},\frac{-4k}{1+4k^2}\right)$. -- 7 分

记 $\triangle OCD$ 面积为 S，$\angle COD=\theta$，

则 $S^2=\frac{1}{4}|OC|^2\cdot|OD|^2\cdot\sin^2\theta$ -- 8 分

$=\frac{1}{4}|OC|^2\cdot|OD|^2\cdot(1-\cos^2\theta)$

$=\frac{1}{4}\left[|OC|^2\cdot|OD|^2-(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD})^2\right]$ -- 9 分

$=\frac{1}{4}\left[(x_D^2+y_D^2)(x_C^2+y_C^2)-(x_Cx_D+y_Cy_D)^2\right]=\frac{1}{4}(x_Cy_D-x_Dy_C)^2$ ------------------ 10 分

所以 $S=\frac{1}{2}|x_Cy_D-x_Dy_C|=\frac{1}{2}\left|\frac{8k^2-2}{1+4k^2}\cdot\frac{1-4k^2}{1+4k^2}-\frac{32k^2}{(1+4k^2)^2}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{-32k^4-16k^2-2}{16k^4+8k^2+1}\right|=1$

所以 $\triangle OCD$ 的面积不可能大于 1. -- 12 分

21．本题考查相互独立事件的概率等基础知识；考查推理论证能力、运算求解能力；考查分类与整合、概率统计等思想．本题满分 12 分．

解：（1）记第 i 轮比赛丁胜、平、负的事件分别为 A_i，B_i，$C_i(i=1,2,3)$，每场比赛结果

相互独立。

丁总分为7分，则丁三场比赛两胜一平，记丁三轮比赛两胜一平的事件为 D ------ 1分

$P(D)=P(A_1A_2B_3)+P(A_1B_2A_3)+P(B_1A_2A_3)=3\times(\frac{1}{6})^2\times(\frac{1}{3})=\frac{1}{36}$ ------------------------ 3分

丁总分7分一定出线 -- 4分

理由如下：丁三场比赛中赢两场，这两场丁的对手比分最多6分，

小组赛两队出线，所以丁一定出线. ------------------------------------ 5分

（2）第一轮比赛，甲胜乙，丙胜丁，又丁总分为6分，则丁对战甲、乙都获胜，此时，乙队总分最多3分，少于丁队总分 ---------------------------------- 6分

①第二轮中若甲负于丙或平丙时，甲总分最多4分，少于丁队总分，此时甲、乙两队少于丁队总分，丁一定出线，其相应的概率 $P_1=[(\frac{1}{3}+\frac{1}{3})\times\frac{1}{6}]\times\frac{1}{6}=\frac{1}{54}$ ------------------ 7分

②第二轮中若甲胜丙、第三轮中丙平乙或负于乙时，丙总分最多4分，此时丙、乙两队少于丁队总分，丁一定出线，其相应的概率 $P_2=(\frac{1}{3}\times\frac{1}{6})\times[(\frac{1}{3}+\frac{1}{3})\times\frac{1}{6}]=\frac{1}{162}$ -------- 9分

③第二轮中若甲胜丙时、第三轮中丙胜乙时，甲、丁、丙队总分均为6分，此时由抽签确定出线，三队中有两队出线，每队出线概率为 $\frac{2}{3}$，

丁队出线的概率 $P_3=(\frac{1}{3}\times\frac{1}{6})\times(\frac{1}{3}\times\frac{1}{6})\times\frac{2}{3}=\frac{1}{486}$ ------------------------------ 11分

综上，丁以6分出线的概率为 $P_1+P_2+P_3=\frac{1}{54}+\frac{1}{162}+\frac{1}{486}=\frac{9+3+1}{486}=\frac{13}{486}$ --------12分

22．本题考查函数及用导数研究函数的单调性、极值、最值等基础知识；考查运算求解、逻辑思维能力；考查分类与整合、化归与转化等数学思想.本题满分12分.

解：（1）依题意，$a=1$ 时 $f(x)=\frac{e^{x-1}}{x}+\ln x-x(x>0)$，

所以 $f'(x)=\frac{(x-1)e^{x-1}}{x^2}+\frac{1}{x}-1=\frac{(x-1)(e^{x-1}-x)}{x^2}$， ------------------------- 2分

记 $q(x)=e^{x-1}-x$，则 $q'(x)=e^{x-1}-1$，

当 $0<x<1$ 时，$q'(x)<0$，$q(x)$ 单调递减；当 $x>1$ 时，$q'(x)>0$，$q(x)$ 单调递增；

所以 $q(x)\ge q(1)=0$，当且仅当 $x=1$ 取等号，即 $e^{x-1}-x\ge 0$， ------------------------ 3分

所以 $x,f'(x),f(x)$ 变化情况如下：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1)=0$，无极大值. ------------------------------------ 5分

6

（2）$f'(x)=\dfrac{e^{x-1}(x-1)}{ax^2}+\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{(x-1)(e^{x-1}-ax)}{ax^2}$，

①当$a\le 1$时，由（1）可知，$e^{x-1}-x\ge 0$，当且仅当$x=1$取等号，

所以当$x>0$时，$e^{x-1}-ax\ge e^{x-1}-x\ge 0$，

所以当$0<x<1$时，$f'(x)\le 0$，$f(x)$单调递减，

当$x>1$时，$f'(x)\ge 0$，$f(x)$单调递增；

所以$f(x)$没有三个极值点，舍去.-- 6 分

②当$a>1$时，

记$r(x)=e^{x-1}-ax$，$r'(x)=e^{x-1}-a$，

所以当$0<x<\ln a+1$时，$r'(x)<0$，$r(x)$单调递减；

当$x>\ln a+1$时，$r'(x)>0$，$r(x)$单调递增；

$r(x)_{\min}=r(\ln a+1)=-a\ln a<0$，$r(0)=\dfrac{1}{e}>0$，$r(1)=1-a<0$，

由零点存在性定理知存在唯一$x_1\in(0,1)$，使得$r(x_1)=0$，即$e^{x_1-1}=ax_1$，

由（1）有$e^{x-1}\ge x$，所以当$x>2$时，有$e^{\frac{x}{2}-1}>\dfrac{x}{2}$，所以$e^x>(\dfrac{e}{2})^2x^2>x^2$，

取$m=\max\{2,ae\}$，则$r(m)=e^{m-1}-am>\dfrac{1}{e}m^2-am=m(\dfrac{m}{e}-a)\ge 0$，

由零点存在性定理知存在唯一$x_3\in(\ln a+1,m)$，使得$r(x_3)=0$，$e^{x_3-1}=ax_3$

由以上推理知$0<x_1<1<\ln a+1<x_3$，且有

当$0<x<x_1$或$x>x_3$时，$r(x)>0$；当$x_1<x<x_3$时，$r(x)<0$，

所以$x,f'(x),f(x)$变化情况如下：

x	$(0,x_1)$	x_1	$(x_1,1)$	1	$(1,x_3)$	x_3	$(x_3,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以$f(x)$有三个极值点$x_1,1,x_3$，（其中$x_2=1$）-- 8 分

此时$\begin{cases}e^{x_1-1}=ax_1,\\e^{x_3-1}=ax_3,\end{cases}$ 两式相除得$e^{x_3-x_1}=\dfrac{x_3}{x_1}$……①

7

设 $\frac{x_3}{x_1}=t\in(1,+\infty)$，……②

由①②可得 $x_1=\frac{\ln t}{t-1},x_3=\frac{t\ln t}{t-1}$ 所以 $\sqrt{x_1x_3}=\frac{\sqrt{t}\ln t}{t-1}$，

记 $g(t)=\frac{\sqrt{t}\ln t}{t-1}(t>1)$，

则 $g'(t)=\frac{(\frac{1}{2\sqrt{t}}\ln t+\frac{1}{\sqrt{t}})(t-1)-\sqrt{t}\ln t}{(t-1)^2}=-\frac{t+1}{2\sqrt{t}(t-1)^2}\left(\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}\right)$，

设 $r_2(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$，则 $r_2'(t)=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}\geq 0$，

所以 $r_2(t)>r_2(1)=0$，从而 $g'(t)<0$，

所以 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，又因为 $\sqrt{x_1x_3}\leq\sqrt{2}\ln 2$，

即 $g(t)\leq g(2)$，所以 $t\geq 2$，--10 分

此时 $x_1=\frac{\ln t}{t-1}$，记 $r_3(t)=\frac{\ln t}{t-1}(t\geq 2)$，$r_3'(t)=\frac{1-\frac{1}{t}-\ln t}{(t-1)^2}$，

由（1）有 $e^{x-1}\geq x$，所以当 $t>0$ 时有 $e^{\frac{1}{t}-1}\geq\frac{1}{t}$，$\frac{1}{t}-1\geq\ln\frac{1}{t}$，所以 $1-\frac{1}{t}-\ln t\leq 0$，

所以 $r_3'(t)\leq 0$，$r_3(t)$ 在 $[2,+\infty)$ 单调递减，

所以 $x_1=r_3(t)\leq r_3(2)=\ln 2$，故 $0<x_1\leq\ln 2$，---11 分

此时 $a=\frac{e^{x_1-1}}{x_1}$，记 $r_4(x)=\frac{e^{x-1}}{x}(0<x\leq\ln 2)$，$r_4'(x)=\frac{e^{x-1}(x-1)}{x^2}<0$，

所以 $a=r_4(x_1)\geq r_4(\ln 2)=\frac{2}{e\ln 2}$，

故 a 的最小值为 $\frac{2}{e\ln 2}$.--12 分

8

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。