2020年全国高中数学联赛新疆赛区预赛答案

一、填空题（本大题共10小题，每小题8分，共80分.）

1. 不等式$1+2^x<3^x$的解集为______.

【答案】$(1,+\infty)$

【解析】即$(\frac{1}{3})^x+(\frac{2}{3})^x<1$，令$f(x)=(\frac{1}{3})^x+(\frac{2}{3})^x$，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上为减函数，且$f(1)=1$，所以解集为$(1,+\infty)$`.

2. 等差数列$\{a_n\}$的公差和等比数列$\{b_n\}$的公比都是$d(d\neq 1)$，且 $a_1=b_1,a_4=b_4,a_{10}=b_{10}$.若存在$m\in N$使得$a_m=b_{22}$，则$m=$______.

【答案】130

【解析】由题得$\begin{cases} a_1=b_1 \\ a_1+3d=b_1\cdot d^3 \\ a_1+9d=b_1\cdot d^9 \end{cases}$，消去$a_1,b_1$得$d^6+d^3-2=0$，解得$d^3=-2$，或1（舍去）

所以$a_1+3d=b_1\cdot d^3$，得$d=-b_1$，$\therefore\ a_1+(m-1)d=b_1\cdot d^{21}=-128b_1$，解得$m=130$.

3. 已知复数z满足$|z|=1$，则$|z+iz+1|$的最小值为______.

【答案】$\sqrt{2}-1$

【解析】

解法一：设$z=\cos\theta+i\sin\theta$，则

$$|z+iz+1|=\sqrt{(1+\cos\theta-\sin\theta)^2+(\cos\theta+\sin\theta)^2}=\sqrt{3+2\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

所以，$|z+iz+1|_{\min}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$

解法二：$|z+iz+1|=\left|\bar{z}-(-1-i)\right|$，由复数的几何意义知，$\left|\bar{z}-(-1-i)\right|$表示复数$\bar{z}$对应的点与点$(-1,-1)$的距离。而复数$\bar{z}$对应的点在单位圆上，故：$|z+iz+1|_{\min}=\sqrt{2}-1$

4. ΔABC的三边分别为a,b,c，点O为ΔABC的外心，已知$b^2-2b+c^2=0$，那么$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AO}$的取值范围是______.

【答案】$[-\frac{1}{4},2)$

【解析】延长AO交△ABC的外接圆于D，得到

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\frac{1}{2}\left(b^2-c^2\right)=\left(b-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$.

因为$c^2=-b^2+2b>0$，所以$b\in(0，2)$，故$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AO}\in[-\frac{1}{4},2)$.

故答案为：$[-\frac{1}{4},2)$.

5. 直线$x-2y-1=0$与抛物线$y^2=4x$交于A,B两点，C为抛物线上的一点，$\angle ACB=90°$，则点C的坐标为______________.

【答案】 $(1,-2)$或$(9,-6)$.

【解析】 设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(t^2,2t)$，由$\begin{cases}x-2y-1=0,\\ y^2=4x,\end{cases}$得 $y^2-8y-4=0$，则$y_1+y_2=8$，

$y_1\cdot y_2=-4$．又$x_1=2y_1+1,x_2=2y_2+1$，所以

$x_1+x_2=2(y_1+y_2)+2=18$，

$x_1\cdot x_2=4y_1\cdot y_2+2(y_1+y_2)+1=1$.

因为$\angle ACB=90°$，所以$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，即有$(t^2-x_1)(t^2-x_2)+(2t-y_1)(2t-y_2)=0$，

即：$t^4-(x_1+x_2)t^2+x_1\cdot x_2+4t^2-2(y_1+y_2)t+y_1\cdot y_2=0$，

即：$t^4-14t^2-16t-3=0$，

即：$(t^2+4t+3)(t^2-4t-1)=0$.

显然$t^2-4t-1\neq0$，否则$t^2-2\cdot2t-1=0$，则点C在直线$x-2y-1=0$上，从而点C与点A或点B重合．所以$t^2+4t+3=0$，解得$t_1=-1,t_2=-3$.

故所求点C的坐标为$(1,-2)$或$(9,-6)$.

6. 由集合{1, 2, 3, 4，…，10}中选出5个数，组成该集合的子集，从这些子集中任取一个，则取出的子集满足该子集中的5个数中任意两个数的和都不等于11的概率为________.

【答案】 $\frac{8}{63}$

【解析】 易知由集合{1, 2, 3, 4，…，10}中选出5个数，组成的该集合的子集个数为：$C_{10}^5=252$；满足子集中的5个数中任意两个数的和都不等于11的子集个数，可以这样考虑：先把数字分成5组：{1, 10}，

{2, 9}，{3, 8}，{4, 7}，{5, 6}，由于选出的 5 个数中，任意两个数的和都不等于 11，所以从每组中任选一个数字即可，故共可组成 2×2×2×2×2＝32(个)这样的子集.

所以概率为：$P=\frac{32}{252}=\frac{8}{63}$

7. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$，若 $f(0)=-f(\frac{\pi}{2})$，且 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上有且仅有三个零点，则 $\omega=$__________ .

【答案】 $\frac{14}{3}$ 或 6

【解析】 因为 $f(0)=-f(\frac{\pi}{2})$，所以 $\frac{1}{2}=\sin(\frac{\pi}{2}\omega-\frac{\pi}{6})$. 即 $\frac{\pi}{2}\omega-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ 或 $\frac{\pi}{2}\omega-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$，即 $\omega=\frac{2}{3}+4k$ 或 $\omega=2+4k,(k\in Z)$，又因为在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上有且仅有三个零点，$\frac{2\pi}{\omega}<\frac{\pi}{2}<\frac{4\pi}{\omega}$，所以 $4<\omega<8$，所以 $\omega=\frac{14}{3}$ 或 6.

8. 现有一个能容纳 10 个半径为 1 的小球的封闭的正四面体容器，则该容器棱长最小值为__________.

【答案】 $4+2\sqrt{6}$

【解析】 这 10 个小球成棱锥形来放，第一层 1 个，第 2 层 3 个，第 3 层 6 个，即每一条棱是 3 个小球，于是正四面体的一条棱长就应该是 4 倍的小球的半径加上 2 倍的球心到四面体顶点的距离到棱长上的射影的长度，又球心到顶点的距离为 3，正四面体的高和棱所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，故容器棱长的最小值为

$4+2\times3\times\frac{\sqrt{6}}{3}=4+2\sqrt{6}$

9. 已知集合 A={1，2，3，…，2020}，对于集合 A 的每一个非空子集的所有元素，计算它们乘积的倒数. 则所有这些倒数的和为__________ .

【答案】 2020

【解析】 集合 A 的 $2^{2020}-1$ 个非空子集中，每一个集合的所有元素之积分别为：1，2，…，2020，1×2，1×3…，2019×2020，…，1×2×…×2020，它们的倒数和为

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2020}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times3}+\ldots+\frac{1}{2019\times2020}+\cdots+\frac{1}{1\times2\times\cdots\times2020}$$

$$=(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2020}\right)-1=2\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{2021}{2020}-1=2020.$$

10. 11 个女孩与 n 个男孩去采蘑菇，所有这些孩子共采到 n^2+9n-2 个蘑菇，并且每个孩子采到的个数都相同，则 $n=$ __________.

【答案】 9

【解析】由于各个孩子采到的蘑菇数目一样多，故孩子总数$n+11$能整除蘑菇总数，而：

$n^2+9n-2=(n+11)(n-2)+20$，从而$n+11$能整除20，由于$n+11>11$，故$n=9$

二、解答题（本大题共4小题，其中第11题16分，第12-14题每小题18分）

11. 已知函数$f(x)$的定义域为$[0,1]$，$f(0)=f(1)$，且对任意不同的$x_1,x_2\in[0,1]$，

都有$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|$，求证：$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$.

【解析】

证明　设$0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$.

(1) 若$0<x_2-x_1\leqslant\frac{1}{2}$，则$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|\leqslant\frac{1}{2}$，即$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$;

(2) 若$\frac{1}{2}<x_2-x_1<1$，则$|f(x_2)-f(x_1)|=|f(x_2)+f(0)-f(1)-f(x_1)|=|f(x_2)-f(1)+f(0)-f(x_1)|\leqslant$

$|f(x_2)-f(1)|+|f(0)-f(x_1)|<|x_2-1|+|x_1-0|$，而$|x_2-1|+|x_1|=1-x_2+x_1=1-(x_2-x_1)<1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

所以$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$.

综上所述，对任意不同的x_1，$x_2\in[0,1]$都有$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$.

12. 已知正项数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n^2=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^3$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；　　（Ⅱ）求证：$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^2}<1.65$.

【答案】（Ⅰ）$a_n=n$；（Ⅱ）证明见解析

【解析】

（Ⅰ）由$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^3=S_n^2\\\sum\limits_{i=1}^{n+1}a_i^3=S_{n+1}^2\end{cases}$得到$a_{n+1}^3=S_{n+1}^2-S_n^2=(S_{n+1}+S_n)(S_{n+1}-S_n)=(S_{n+1}+S_n)a_{n+1}$.

因为$a_{n+1}>0$，所以$a_{n+1}^2=2S_n+a_{n+1}$，即$2S_n=a_{n+1}^2-a_{n+1}$，$2S_{n-1}=a_n^2-a_n(n\ldots 2)$.

两式相减，得$2a_n=a_{n+1}^2-a_{n+1}-a_n^2+a_n$，进而$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)=a_{n+1}+a_n$.

因为$a_{n+1}+a_n>0$，所以$a_{n+1}-a_n=1(n\ldots 2)$.

又由已知$a_1=1,a_2=2$，所以，对任意$n\in N_+$，有$a_{n+1}-a_n=1$，

即$\{a_n\}$是等差数列，故$a_n=n$.

（II）$\frac{1}{a_k^2}=\frac{1}{k^2}<\frac{1}{(k-\frac{1}{2})(k+\frac{1}{2})}=\frac{1}{k-\frac{1}{2}}-\frac{1}{k+\frac{1}{2}},k\in N^*$

所以当$n\geq 3$时，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^2}<1+\frac{1}{4}+(\frac{1}{3-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3+\frac{1}{2}})+(\frac{1}{4-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4+\frac{1}{2}})+\cdots+(\frac{1}{n-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}})$

$$=1+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}<1.65$$

当$n=1$时，左边$=1<1.65$成立，当$n=2$时，左边$=1+\frac{1}{4}<1.65$成立，

所以$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^2}<1.65$.

13．已知a,b,c,d为正实数，且$ab+bc+cd+da=1$，

求证：$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\geq\frac{1}{3}$

【解析】

证明：由柯西不等式，可得：

左式$\times\left[a(b+c+d)+b(a+c+d)+c(a+b+d)+d(a+b+c)\right]\geq(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$

下证$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2\geq\frac{2}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$：

由$ab+bc+cd+da=1$，可得$a^2+b^2+c^2+d^2\geq 1$.

而$ab+ac+ad+bc+bd+cd=1+ac+bd\leq 1+\frac{1}{2}(a^2+c^2)+\frac{1}{2}(b^2+d^2)\leq\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)$

故$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2\geq a^2+b^2+c^2+d^2\geq\frac{2}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$.

14. 设椭圆$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1$有一个内接$\Delta PAB$，射线 OP 与$x$轴正向成$\frac{\pi}{3}$角，直线 AP, BP 的斜率适合条件$k_{AP}+k_{BP}=0$.

（I）求证：过 A, B 的直线的斜率k是定值；

（II）求ΔPAB面积的最大值.

【答案】（I）定值$\sqrt{3}$；（II）$(S_{\Delta PAB})_{\max}=\sqrt{3}$.

【解析】

（I）证明：易知直线 OP 的方程为$y=\sqrt{3}x$，将此方程代入$3x^2+y^2=6$，可求得交点

P(1, $\sqrt{3}$). 由题意可设直线 PA, PB 的方程分别为 $y-\sqrt{3}=-k(x-1)$ 和 $y-\sqrt{3}=k(x-1)$,

分别与椭圆方程联立, 可求得 A, B 的横坐标分别为 $x_A=\dfrac{k^2+2\sqrt{3}k-3}{3+k^2}$, $x_B=\dfrac{k^2-2\sqrt{3}k-3}{3+k^2}$.

从而 $y_A=\dfrac{-k(2\sqrt{3}k-6)}{3+k^2}+\sqrt{3}, y_B=\dfrac{k(-2\sqrt{3}k-6)}{3+k^2}+\sqrt{3}$,

所以 $k_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{12k}{3+k^2}\cdot\dfrac{3+k^2}{4\sqrt{3}k}=\sqrt{3}$ (定值).

(Ⅱ) 不妨设直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}x+b$, 与椭圆方程联立

消去 y 得 $6x^2+2\sqrt{3}bx+(b^2-6)=0$,

有 $|AB|^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2=4(x_A-x_B)^2 4[(x_A+x_B)^2-4x_Ax_B]$

$$=4[(-\frac{\sqrt{3}}{3}b)^2-\frac{2}{3}(b^2-6)]=-\frac{4}{3}b^2+16$$

点 P 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{|\sqrt{3}-\sqrt{3}+b|}{2}=\dfrac{|b|}{2}$,

所以 $S^2{}_{\Delta PAB}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{b^2}{4}\times(16-\dfrac{4}{3}b^2)=\dfrac{b^2}{12}(12-b^2)\le\dfrac{1}{12}[\dfrac{b^2+(12-b^2)}{2}]^2=3$,

当且仅当 $b^2=12-b^2$, 即 $b=\pm\sqrt{6}$ 时, $(S_{\Delta PAB})_{\max}=\sqrt{3}$.

关于我们

自主招生在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“**答题模板**”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“**必背知识点**”,即可获取《高考考前必背知识点》